МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КІРОВОГРАДСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ВИННИЧЕНКА

О.В. Авраменко, Л.І. Лутченко,
В.В. Ретунська, Р.Я. Ріжняк, С.О. Шлянчак

Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики

Кіровоград – 2009

УДК 51(07)
ББК

ISBN

О.В. Авраменко, Л.І. Лутченко, В.В. Ретунська, Р.Я. Ріжняк, С.О. Шлянчак Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики: Посібник для спецкурсу. – Кіровоград: КДПУ, 2009. – 200 с.

Робота спрямована на формування досвіду творчої діяльності учителів математики (студентів заочного відділення фізико-математичного факультету), на збагачення їх знань з теорії організації групової навчальної діяльності молодших школярів, самостійної роботи учнів основної школи й умінь застосовувати її в практиці навчання математики.

Методичні особливості викладання теорії ймовірностей у закладах профільного типу, його прикладна спрямованість представлені у посібнику як пошук шляхів вирішення проблеми розвитку в школярів імовірнісно-статистичного мислення.

Приклади використання можливостей універсальної математичної системи MAPLE для розв’язування задач допоможуть вчителеві на факультативних заняттях з математики підвищити інформаційну культуру старшокласників, сформувати навички комп’ютерного контролю за ходом розв’язання.

У посібнику показане використання дидактичних ігор при вивченні математики на уроках та в позаурочний час, уміщено сценарії різних форм позакласних заходів.

Методичні доробки авторів будуть корисні для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних вузів та вчителів математики закладів освіти.

Рецензенти:

кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики та методики її викладання Національного педагогічного університету ім. М.П.Драгоманова **Швець В.О.**;

доктор педагогічних наук, професор кафедри педагогіки початкового навчання Кіровоградського педагогічного університету імені Володимира Винниченка **Мельничук С.Г**.;

доктор педагогічних наук, професор кафедри математики Кіровоградського педагогічного університету імені Володимира Винниченка **Кушнір В.А**.;

вчитель математики вищої категорії м.Кіровограда, вчитель-методист, заслужений вчитель України **Донець В.Ф.**

ISBN ББК

А

ВСТУП

Посібник написано для студентів заочного відділення фізико-математичного факультету (вчителів математики) за сприяння Управління освіти і науки Кіровоградської обласної державної адміністрації в рамках проекту **“Організація інтенсивної математичної підготовки обдарованих школярів Кіровоградщини”** (наукові керівники: **Авраменко Ольга Валентинівна –** доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики, статистики та економіки, **Ріжняк Ренат Ярославович** – кандидат педагогічних наук, доцент, декан фізико-математичного факультету), мета якого забезпечення системної математичної підготовки обдарованих дітей Кіровоградської області із використанням інноваційних технологій. Одним із завдань проекту є підвищення кваліфікації вчителів математики, які працюють з обдарованими дітьми, формування досвіду їх творчої діяльності, збагачення знань з теорії та вироблення умінь застосовувати її в практиці навчання математики.

Обдарованість – складне, багатогранне явище. Кожна обдарована дитина – індивідуальність, що потребує особливого підходу. Саме тому навчання і виховання обдарованих учнів необхідно здійснювати з опорою на такі дидактичні принципи, як індивідуалізація й диференціація навчання, довіра і підтримка, залучення обдарованих учнів до участі у житті школи, міста, області, країни.

Важливою практичною проблемою є виявлення потенційних можливостей розвитку учня. Система роботи з виявлення обдарованих дітей включає в себе:

- попередню діагностику сформованості інтелектуальних умінь;
- спостереження за роботою учнів на уроках математики; під час позакласних заходів;
- аналіз результатів виконання самостійних, творчих робіт;
- аналіз результатів участі учнів в олімпіадах, інтелектуальних змаганнях тощо.

Як відомо, обдаровані діти виділяються рядом характерних особливостей:

- обдаровані діти мають добру пам’ять, особистий світогляд;
- в обдарованих дітей добре розвинута свідомість;
- обдаровані діти, як правило, дуже активні і завжди чимось зайняті;
- обдаровані діти настирливі в досягненні результату у сфері, яка їх цікавить, для них характерний творчий пошук;
- вони хочуть вчитися і досягають у навчанні успіхів; навчання дає їм задоволення;
- вони вміють критично оцінювати навколишню дійсність і прагнуть проникнути у суть речей і явищ, вміють фантазувати;
- вони з задоволенням виконують складні і довгострокові завдання;
- вміють розкривати взаємозв’язки між явищами і сутністю, індуктивно і дедуктивно думати, маніпулювати логічними операціями, систематизувати, класифікувати і узагальнювати їх.

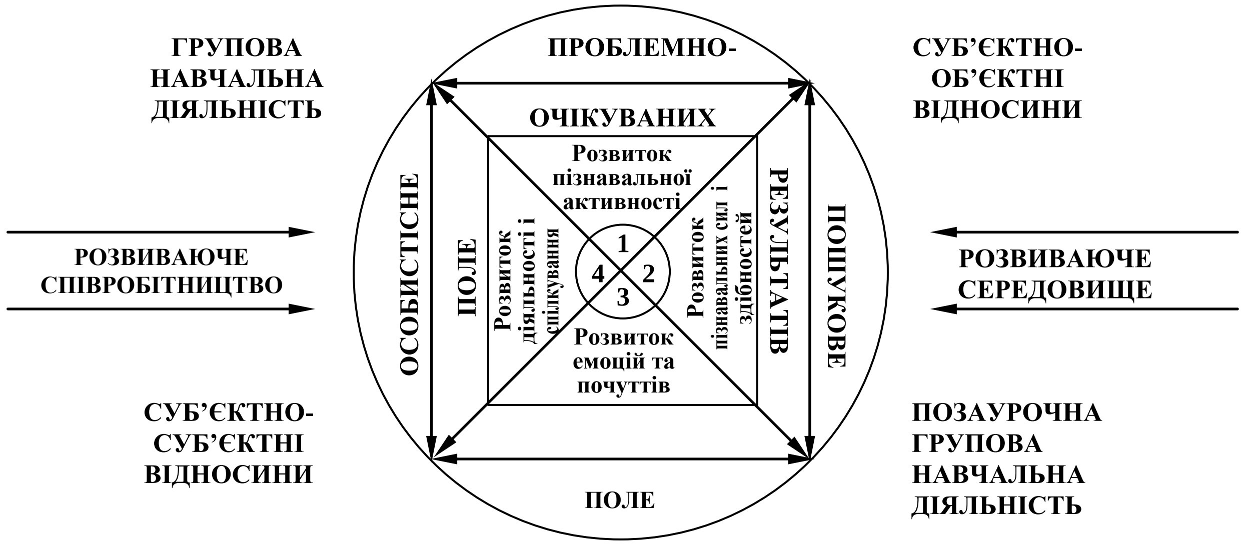
Однією з найважливіших умов розвитку обдарованості учнів є формування пізнавального інтересу, який є підґрунтям для розвитку пізнавальної активності учнів. Під впливом пізнавального інтересу з’являються такі важливі компоненти активного навчання як активний пошук, здогад, дослідницький підхід, готовність до розв’язування задач.

Цій важливій проблемі присвячений перший розділ посібника «Шляхи організації групової навчальної діяльності молодших підлітків з метою розвитку їх пізнавальної активності», що містить матеріали дисертаційного дослідження вчителя-методиста загальноосвітньої школи №16 Кіровоградської міської ради Ретунської Вікторії Вікторівни «Розвиток пізнавальної активності молодших підлітків у процесі групової навчальної діяльності». Авторське розуміння проблеми групової навчальної діяльності перш за все базується на визнанні свободи вибору дитиною тих видів діяльності, в яких вона максимально реалізує себе як особистість, в створенні для кожної дитини особистісного проблемно-пошукового поля (див. схема 1).

Нестандартні, дослідницькі задачі , які вчитель включає у структуру роботи, обдаровані діти сприймають як виклик власному інтелекту.

Схема 1

МОДЕЛЬ СИСТЕМИ ДОСЛІДЖЕННЯ



Творчість учнів, новизна і оригінальність їх навчальної діяльності проявляються тоді, коли вони самостійно ставлять проблему і знаходять шляхи її розв'язання. При цьому слід добиватися постійного зростання рівня творчості обдарованих дітей, знаходити оптимальні співвідношення всіх видів їх діяльності, щоб одержати найкращі результати. Вчителю треба звернути увагу на те, що ставлячи проблему, варто залишати «нерозв'язані питання», відповідь на які учні повинні одержати самостійно з різних джерел: літературних, експериментальних, шляхом консультацій тощо.

Проблемі організації самостійної роботи учнів 7-9 класів у процесі навчання математики присвячений другий розділ посібника, написаний доцентом кафедри прикладної математики, статистики та економіки (ПМСЕ) Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка (КДПУ), кандидатом педагогічних наук, вчителем-методистом Педагогічного ліцею м. Кіровограда Лутченко Людмилою Іванівною спільно з професором кафедри математики КДПУ, кандидатом педагогічних наук Ріжняком Ренатом Ярославовичем. Актуальність досліджуваної ними проблеми обґрунтовується сучасними вимогами суспільства, адже важливо не те, скільки фактів сьогодні запам'ятав учень, а наскільки розвинуті його «сила розуму», нахили і здібності розмірковувати, критично мислити, знаходити правильне розв'язання проблеми, застосовувати знання на практиці, переносити відомі йому способи дій в нові для нього ситуації і відкривати нові способи діяльності.

У зв’язку із швидкими темпами накопичення нової інформації, особливо в природничо-математичних науках, уже у школі необхідно готувати школярів до неперервної освіти після закінчення закладів освіти, що потребує формування в них пізнавального інтересу і самостійності відшукання шляхів його задоволення. Треба закласти в учнів механізми самоосвіти, самовиховання, самореалізації, саморозвитку, саморегуляції, взаєморозуміння, спілкування, співпраці, необхідні для становлення особистості, здатної без сторонньої допомоги оволодівати знаннями і способами діяльності, розв’язувати пізнавальні задачі з метою подальшого перетворення й удосконалення навколишньої дійсності. Ця властивість особистості формується головним чином в ході самостійної діяльності учнів.

Працюючи самостійно, учні, як правило, глибше вдумуються в зміст опрацьованого матеріалу, краще зосереджують свою увагу, ніж це звичайно буває при поясненнях учителя або розповідях учнів. Тому знання, навички і уміння, набуті школярами в процесі добре організованої самостійної роботи, бувають міцнішими і ґрунтовнішими. Крім того, у процесі самостійної діяльності в учнів розвивається наполегливість, креативність тощо.

Враховуючи вищесказане, у дослідженні значну увагу приділено формам і засобам самостійних робіт, які сприяють міцному засвоєнню знань учнів, формуванню в них творчої активності й самостійності, вихованню позитивного відношення до навчальної праці, зростанню пізнавального інтересу до математики.

У третьому розділі «Методичні особливості навчання теорії ймовірностей у профільних класах» вміщено методичні доробки вчителя-методиста Педагогічного ліцею Лутченко Л.І. під час викладання математики в природничо-математичному класі.

Четвертий розділ посібника «Засоби універсальної математичної системи MAPLE у математиці» присвячений проблемі впровадження інноваційних інформаційних технологій в процес навчання математики обдарованих та здібних школярів Кіровоградщини, зокрема старшокласників. Наукові дослідження проводилися на базі заочної фізико-математичної школи та зимової школи Центру математичної підготовки учнів провідним фахівцем проекту Шлянчак Світланою Олександрівною, викладачем кафедри інформатики КДПУ, під керівництвом Авраменко Ольги Валентинівни, професора, доктора фізико-математичних наук, завідувача кафедри ПМСЕ КДПУ.

Запропоновані нами методи та прийоми навчання можуть вибірково (чи повністю) застосовуватися вчителями у спеціалізованих математичних класах, на заняттях математичних факультативів, математичних гуртків, при формуванні індивідуальних завдань для учнів у вигляді наукового дослідження, при формуванні завдань для учнівських (індивідуальних чи колективних) проектів, при підготовці й проведенні математичних олімпіад різного рівня, індивідуальної роботи з обдарованими та здібними учнями тощо. Частково методи, наведені у четвертому розділі, можуть використовуватися вчителями на заняттях з математики у загальноосвітніх школах при формуванні творчості учнів у процесі розв'язування задач диференціального й інтегрального числення, побудови математико-економічних моделей, їх розв'язування та інтерпретації розв'язків щодо умов прикладних задач, при побудові графіків функцій методом геометричних перетворень, використанні інформаційних технологій тощо.

Інтелектуальний і естетичний заряд математичної дисципліни значно підвищується, коли на уроці, а також під час інших форм спілкування з школярами застосовуються ігрові елементи, яскраві історичні повідомлення, цікаві «красиві задачі» (*використання дидактичних ігор при вивченні математики на уроках та в позаурочний час, сценарії різних форм позакласних заходів уміщено в додатках*).

Розвиток обдарувань та нахилів учнів здійснюється такими шляхами:

- включення у структуру уроку проблемних, евристичних методів роботи, різних форм організації навчальної діяльності;
- забезпечення участі школярів у позакласних заходах з предмета, у заняттях гуртків;
- створення умов для самостійної діяльності;
- створення умов для участі учнів у олімпіадах, турнірах, конкурсах.

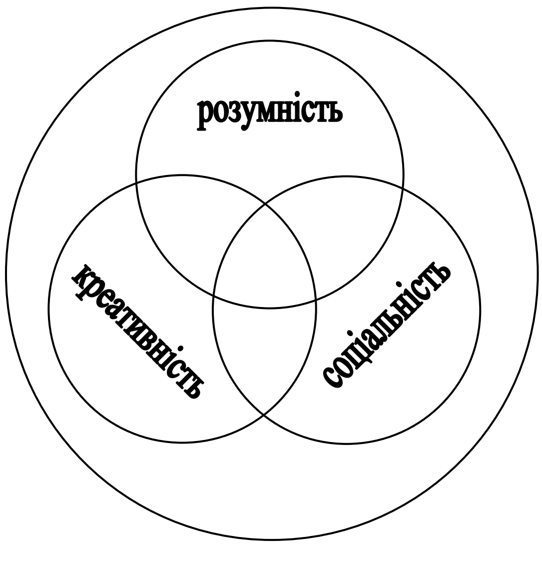
Зміна форм діяльності, опора на творчі інтереси дітей, різноманітність областей застосування здібностей – все це допомагає зберігати високу працездатність обдарованих дітей. У них виробляється потреба брати все нові й нові рубежі на шляху свого зростання.

Тож бажаємо і вчителям математики, і учням творчих успіхів й натхнення, впевненості у власних силах, успішного здійснення планів і задумів, і нехай на всіх життєвих дорогах вам незмінно щастить!

Вікторія Ретунська

Розділ І.

Шляхи організації групової навчальної діяльності молодших підлітків з метою розвитку їх пізнавальної активності



Реформування національної освіти в Україні породжує велику потребу у нових підходах до організації навчально-виховного процесу в школі, у пошуку ефективних технологій навчання і виховання. Важливу роль у цьому може відіграти таке змістовне, результативно діюче й емоційно насичене особистісне утворення, як пізнавальна активність. У ньому вдало поєднується здатність впливу на збагачення пізнавальних сил і здібностей людини з впливом на виховання моральних якостей, на розвиток особистості взагалі, що врешті-решт є головною метою освіти.

Докорінна зміна освітньої мети переорієнтовує процес навчання на особистість дитини – його гуманізацію, загально - розвивальний характер. Особистісно орієнтоване навчання передбачає організацію навчання на засадах глибокої поваги до особистості вихованця, врахування особливостей індивідуального розвитку, ставлення до нього як до свідомого відповідального суб’єкта навчально – виховної взаємодії.

Сучасне шкільне життя не відповідає запиту на численні здібності дітей, обмежуючи їхню соціальну участь вербально – теоретичним навчанням. Тому питання розвитку спроможності школярів активно впливати на навколишній світ і максимально широко реалізовувати природний потенціал щодо власного психосоціального зростання нівелюється формальним виконанням замовлення середньої загальноосвітньої школи. У результаті потенційно широкий простір потреб, здібностей та інтересів учня не заповнюється можливим спектром міжсуб’єктної розвивальної взаємодії, не актуалізує найрізноманітніші форми поведінки, діяльності, спілкування, які мають непересічне значення у формуванні особистості.

Актуальність цієї суспільної проблеми полягає в тому, що система шкільного навчання повинна забезпечувати багатосферний гармонійний розвиток нахилів, здібностей і обдарувань у контексті досягнення кожною особистістю високих меж взаєморealізації і духовного самовдоско-налення. Шляхи розв’язання цієї проблеми містяться у використанні нових форм організації шкільного життя, однією з яких, на наш погляд, є “система розвиваючих взаємодій”, складовою частиною якої якраз і являється групова діяльність учнів. Парадоксально, але факт – новою парадигмою навчання залишається організація групової роботи.

Якщо внутрішній світ дитини розглядати так, як поєднання трьох складових: розумність, креативність, соціальність, то стає очевидним, що традиційна форма навчальної діяльності не створює умов спільного розвитку всіх трьох метасфер особистості. І лише групова форма діяльності, розвиваючи пізнавальний потенціал особистості, створюючи умови для оволодіння різними видами діяльності, підвищуючи творчу активність особистості є таким видом діяльності, в якому одночасно функціонують і розвиваються специфічні форми мотивації і активності, механізми поведінки, що відповідають трьом даним складовим.

З наукової точки зору, групова діяльність створює найсприятливіші умови для самовизначення і самореалізації особистості. Просторово-часові орієнтири, потребно-вольові переживання, змістовні спрямованості особистості, рівні оволодіння діяльністю, форми реалізації діяльності – все це знаходить своє місце у груповій діяльності школяра. Але, з іншого боку, цими параметрами визначається багатовимірна структура особистості. Тому справедливо, що саме групова діяльність є одним із сучасних ефективних засобів всебічного розвитку учня.

§1. Пізнавальна активність як педагогічне утворення.

Проблема пізнавальної активності є предметом дослідження в педагогіці та психології упродовж багатьох років. Але сьогодні в розумінні її суті відбуваються помітні зміни, викликані переходом від уніфікованої адаптивної парадигми “знань, умінь і навичок” до парадигми “варіативної розвиваючої освіти”. Звернемося безпосередньо до “смислового поля” поняття “пізнавальна активність” і визначимо суть і критерії сформованості даного поняття.

Пізнавальна активність індивіда має місце при включенні його в пізнавальний процес. Кажучи про пізнання як відтворення в свідомості індивіда об’єктивної дійсності, необхідно відзначити, що воно має два рівні: репродуктивний і продуктивний, які відрізняються один від одного повнотою відображення об’єкта й характером самого пізнавального процесу. З цими двома рівнями відображення реального світу у свідомості суб’єкта й пов’язана особливість активного пізнання.

На рівні репродуктивного пізнання об’єкт (навчальний матеріал) сприймається у тому вигляді, в якому він безпосередньо даний зовнішньому сприйняттю.

Пізнання продуктивне, вважаючись вищим рівнем пізнання, містить у собі активне начало. Для нього характерне перш за все перетворююче ставлення суб’єкта до об’єкта пізнання. Якщо спрямувати вектор продуктивного пізнання в площину шкільного навчання, то він якраз опише коло дії пізнавальної активності. Пізнавальна активність – це пізнання, що проходить при більш інтенсивній діяльності учнів, під час якої відбувається не тільки засвоєння знань, умінь і навичок, а й формування емоційно-оціночного ставлення до процесу і результатів пізнання.

"Смислове поле" поняття "пізнавальна активність" містить у собі як один із визначальних елементів таке загальнонаукове поняття, як "активність". У науковій літературі спостерігаються дві тенденції у визначенні поняття "активність", які ми узагальнили і відобразили як:

I "активність" $\rightleftarrows$ "діяльність";

II "активність" $\rightleftarrows$ "особистість".

Глибокий діалектичний взаємозв'язок двох наукових понять "активність" і "діяльність" відзначається багатьма ученими, зокрема:

- "активність" розглядається як широка, всеосяжна категорія, яка включає в себе діяльність (Ю.О. Воробйов, М.В. Дьомін, А.В. Маргуліс та ін.);
- поняття "активність" та "діяльність" ототожнюються (В.П. Іванов);
- "активність" розглядається як якісна характеристика, міра "діяльності", ступінь її виявлення (В.З. Коган);
- "активність" розглядається як риса людини (М.О. Данилов).

Як на нашу думку, то новий зміст поняття "активність" в педагогіці повинен бути доповнений представленням "Я-концепції" особистості в "смисловому полі" даного поняття.

С.Д. Смирнову належить блискуче визначення ознаки активності: "Активність виступає як одна з констатуючих характеристик людської діяльності, що виражають її здатність до саморозвитку, саморуху через ініціювання об'єктом цілеспрямованих творчих (тобто таких, які перетворюють дійсність) предметних дій" [24]. Також ним виділено такі три параметри активності: 1 – ініціювання дії суб'єктом; 2 – спрямованість на зміну зовнішньої діяльності; 3 – відставленість у часі і просторі акту діяльності від остаточного результату, з одного боку, і від подій, що його ініціювали – з другого, а також наявність між ними опосередкованих дій.

Таким чином, поняття "активність" включає в себе, по-перше, кількісні та якісні характеристики рівня інтенсивності процесу або будь-якої взаємодії; по-друге, кількісну та якісну характеристики потенційних можливостей суб'єкта щодо взаємодії; по-третє, уявлення про початок будь-якого процесу або взаємодії, які зумовлені головним чином внутрішніми протиріччями суб'єкта, опосередкованими впливом іззовні.

За основними функціями всі види активності можна умовно розділити на два типи: адаптивний і продуктивний. "Як найбільш загальні структурні елементи вказаних двох типів активності доцільно виділити такі: 1) тип потреб (мотивів), які викликають той чи інший вид активності; 2) структуру психічної регуляції активності; 3) закономірності розвитку (і виховання) активності.

Якщо розглядати активність у системі пізнавальних процесів, то необхідно виділити три суттєво різних рівні її вияву. У продуктивній пізнавальній активності ці рівні виражаються: 1) як активність уваги, яка обумовлена новизною стимулу і розгортається в систему орієнтувально-дослідницької діяльності; 2) як дослідницька пізнавальна активність, що виникає в проблемній ситуації в умовах навчання, в спілкуванні; 3) як особистісна активність, що знаходить втілення в формі "інтелектуальної ініціативи" (Д.Б. Богоявленська), "надситуативної активності" (В.А. Петровський), "самореалізації особистості". Адаптивні форми активності визначають таку форму навчання як навчання "за зразком". Базою продуктивної форми активності є пошукова пізнавальна активність суб'єкта. Продуктивні види активності забезпечують "породження образів" (В.П. Зінченко), узагальнень (В.В. Давидов), цілей (О.К. Тихомиров), смислів (О.М. Леонтьєв), здібностей (Н.С. Лейтес), мотивів і інтересів (Л.І. Божович, Н.Г. Морозова, Т.І. Шамова, Г.І. Щукіна).

Наведені визначення поняття "пізнавальна активність" мають своїм фундаментом той факт, що освоєння невідомого спонукає людину до творчої діяльності. При цьому зовнішній вплив відбивається через психічний стан конкретної особи, через її вольові якості, емоції. І засвоєння об'єкта пізнання, і відбиття зовнішнього впливу вимагає активності суб'єкта. Отже, пізнавальна активність у цих визначеннях характеризує індивідуальні особливості людини в процесі пізнавальної діяльності, ігноруючи факт самовияву особистості у цьому процесі. Не розкрите це поняття і з точки зору міжособистісної взаємодії учасників самої пізнавальної діяльності. Тобто виникла ситуація, коли "смислове поле" даного поняття повинне бути доповнене новим змістом, який відповідає змінам, що відбуваються в ціннісних орієнтирах освітнього процесу.

Перехід від "адаптивно-дисциплінарної моделі засвоєння суми знань і навичок до народження образу світу в спільній діяльності з дорослими і ровесниками; від інформаційної когнітивної педагогіки – до смислової ціннісної педагогіки; від технології навчання за формулою "відповідь без запитання" – до життєвих завдань і пізнавальної мотивації дитини; від "виучуваної безпорадності дитини" – до надситуативної активності і постановки зверхзавдань; від уроку як авторитарного монологу – до уроку сприянню і співтворчості; … від культури корисності – до культури гідності” [1, с. 3-12] – все це настійно вимагає нового “прочитання” поняття “пізнавальна активність”.

У світлі концепції персоналізації, розробленої В.А. Петровським і А.В. Петровським [18], пізнавальну активність можна розглядати як вияв або ступінь вияву потреби персоналізації, тобто потреби індивіда бути особистістю у процесі навчання. Якщо раніше вважалося, що учню необхідно виявити активність з метою успішного вирішення поставленого перед ним навчального завдання, то тепер стимулювання активності в процесі навчальної діяльності необхідне йому для здійснення акту персоналізації. Далі ми детально зупинимося на тому, як у процесі групової навчальної діяльності можливості персоналізації, узнавання дітьми один одного сприяють зростанню їх пізнавальної активності, а зараз просто констатуємо факт, що одним із показників активності учня в навчальній діяльності можна вважати показник персоналізації, що в свою чергу дозволяє розглядати пізнавальну активність у сфері особистісно-утворюваної діяльності учня.

У процесі пізнавальної діяльності відбувається взаємодія її учасників. Мова йде про вплив особистості суб’єкта на іншого індивіда. Якщо будову внутрішнього світу людини представити у вигляді еліпса, то його двома центрами будуть: “Я” та “інший у мені”. Тому має місце таке поняття, як “принцип відображеної суб’єктності”. У найширшому смислі воно може бути визначене як “буття будь-якого в іншому і для іншого”. “При такому підході особистість розкривається як системна (соціальна) якість індивіда, а саме: як його здатність обумовлювати зміни значимих аспектів індивідуальності інших людей, бути суб’єктом перетворення поведінки і свідомості оточуючих через свою представленість у них” [18].

Вибір одним із показників пізнавальної активності показника відображеної суб’єктності особистості вводить у “смислове поле” даного поняття особистісно-смислові стосунки, що в свою чергу дозволяє аналізувати пізнавальну активність через таку форму відображеної суб’єктності, як “перетворене Я”.

Якщо особистість – суб’єкт свого власного розвитку, який постійно знаходиться у пошуку і вибудовуванні тих видів діяльного ставлення до світу, в яких можуть повніше виявитися і розвинутися унікальні потенції конкретного індивіда, то тим самим право дитини на свободу вибору особистого темпу просування у пізнавальній діяльності гарантовано. Особистість, знаходячись у “полі” пізнавальної діяльності, сама визначає ступінь своєї активності через реалізацію таких принципів, як принципи персоналізації і відображеної суб’єктності. Саме ступінь самореалізації і самоактуалізації особистості характеризує рівень її пізнавальної активності. Тому вона визначається нами ще через один параметр, який відображає рівень свободи, наданої учню у виборі як виду діяльності, так і темпу засвоєння навчального матеріалу.

Таким чином, ступінь персоналізації особистості, принцип відображеної суб’єктності і рівень свободи вибору школярем особистого темпу просування в пізнавальній діяльності можуть бути розглянуті як можливі показники визначення пізнавальної активності учнів.

Традиційно в структурі пізнавальної діяльності виділяли мотиваційний, операційний, морально-вольовий і творчий аспекти, намагаючись явно не виділяти особистісний компонент пізнавальної активності. Але на рівні особистісного аспекту пізнавальна активність може бути доповнена такими важливими для сучасного розуміння самої суті процесу навчання моментами як: потреба особистості в пізнанні, прагнення до самовиявлення в пізнанні; пізнавальна ініціатива особистості; надситуативність при самовияві; перетворювальність мислення особистості з метою творчості чи поглибленого пізнання.

Спираючись на дослідження Л.В. Марьяненко [15], ми спробували представити структурну організацію пізнавальної активності таким чином (див. Схема 1.1):

Схема 1.1

Структура пізнавальної активності

структура пізнавальної активності

мотиваційний компонент

- загальна спрямованість учня на пізнання, навчальну діяльність, конкретне завдання;
- позитивне ставлення до пізнавальної діяльності;
- сформованість навчально-пізнавального інтересу;
- сформованість пізнавальної потреби як відчуття внутрішньої необхідності в навчально-пізнавальній діяльності;
- сформованість пізнавальної ініціативи як дійового початку пізнавальної діяльності, а також як дійовий вихід за межі заданого з метою всебічного пізнання

операційний компонент

- мислительні операції та розумові вміння (аналіз, порівняння, узагальнення, систематизація, активне перенесення визначення понять, виділення головного, абстрагування, встановлення причинно-наслідкових зв’язків, доказ-спростування);
- властивості мислення (самостійність, критичність, конструктивність, проблемність, перетворювальність, сміливість, глибина, широта, гнучкість);
- мовно-розумова діяльність (вміння передавати зміст матеріалу своїми словами, прагнення урізноманітнювати висловлювання своєї думки, логічність і точність мовних висловлювань, їх чіткість)

особистісний компонент

- допитливість як прагнення до глибшого пізнання явищ;
- вдумливість як уміння віднаходити причинно-наслідкові зв’язки в явищах дійсності;
- схильність до участі в дискусіях;
- інтелектуальна рефлексія;
- самовдосконалення;
- самокритичність;
- впевненість у собі;
- почуття власної гідності;
- відсутність страху помилки;
- вміння відстояти власні погляди;
- схильність до особистого самовияву;
- ініціативність особистості як схильність виявити пізнавальну активність за власним почином

Серед видів пізнавальної активності виділяють такі:

- актуальну (дійсну) активність і потенційну (можливу) (Крупнов А.І.);
- залежно від ставлення особистості до характеру діяльності, яку вона здійснює, можна говорити про репродуктивну (виконавчу) або творчу активність;
- залежно від характеру пізнавальної діяльності суб'єкта І.О. Редковець називає чотири рівні пізнавальної активності: 1) репродуктивна активність, яка характеризується готовністю успішно оволодівати готовими знаннями; 2) аплікативна активність, для якої характерна готовність до енергійної вибірково-відтворювальної діяльності; 3) інтерпретована активність, яка відзначає готовність до енергійного тлумачення, роз'яснення, розкриття змісту будь-чого; 4) продуктивна активність, для якої типова готовність до самостійного творення нового.

Г.І. Щукіна фіксує такі три рівні активності учня: 1) репродуктивно-наслідувальна активність; 2) пошуково-виконавська; 3) творча [27, с. 27].

Т.І. Шамова пов'язує рівні пізнавальної активності з рівнями інтересів та наполегливості школярів: відтворююча активність, інтерпретуюча та творча [26, с. 52-54].

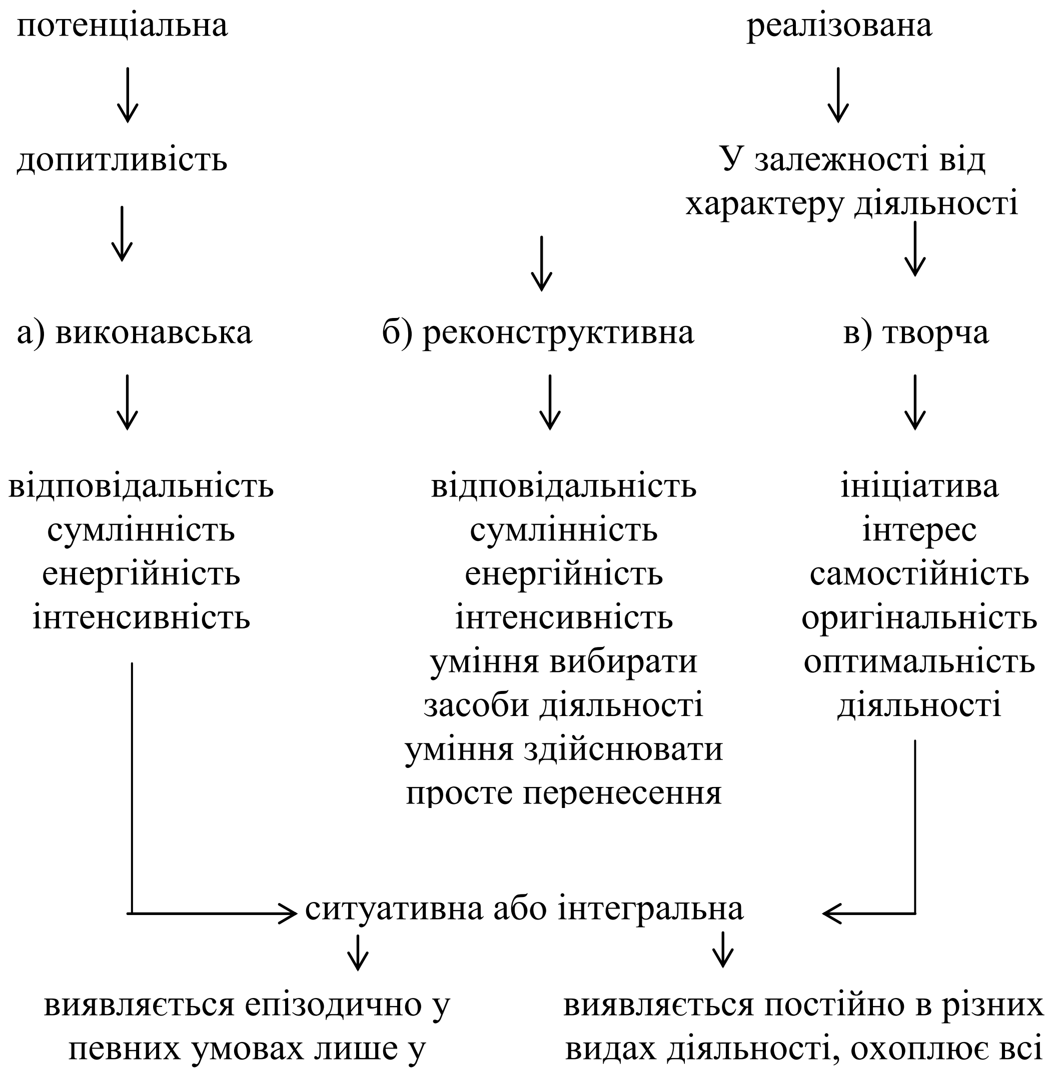
За змістом активність може бути всебічною або однобокою; за тривалістю – стійкою та тимчасовою; за спрямованістю – позитивною і негативною. (В.І. Гладких).

В.І. Лозова визначає ситуативну й інтегральну пізнавальну активність [14].

У кожному виді активності можна також виділити ступінь її виявлення – високий, середній, низький. Для виявлення рівня сформованості активності особистості необхідно встановити ті критерії, які відбивають сутність явища, тобто об'єктивні результати і характер діяльності, а також суб'єктивні фактори. Ми розділяємо думку В.С. Гуріна, який вважає, що критерій повинен враховувати три параметри: чому і в ім'я чого суб'єкт діє, що він чинить і як, якими засобами користується й за яких умов – тобто складається відповідно до казуального (чому і для чого), змістовного або результативного (що) та динамічного (як) показників. В.І. Лозова вказує, що "для визначення критеріїв активності необхідно врахувати: 1). Види діяльності (пізнавальна, трудова, суспільна, ігрова), котрі визначають специфіку виявлення активності. 2). Вольові зусилля особистості в досягненні мети, що дає змогу говорити про активність потенційну і реалізовану. 3). Характер діяльності суб’єкта. Тобто чому він віддає перевагу – ініціативі, самостійності, творчості чи відтворенню, копіюванню. 4). Стійкість, всебічність, тривалість, динаміку виявлення активності” [14, с. 35]. Ці фактори дозволили В.І. Лозовій визначити такі показники пізнавальної активності [14, с.36] (див. Схема 1.2):

Схема 1.2

Види та критерії активності



Бачимо, виділені В.І. Лозовою види і критерії активності залежать від вольових зусиль особистості. Їх необхідно доповнити показниками, які б характеризували самовияв особистості через ініціювання її спрямованих творчих дій, тобто тими показниками, що дають можливість побачити ступінь реалізації у пізнавальній діяльності “Я-концепції” особистості.

Ними можуть бути запропоновані нами раніше показник персоналізації, показник рівня відображеної суб'єктності особистості і показник міри ініціювання активності суб'єктом, який не стільки характеризує рівень виявленої активності, що відповідає традиційній точці зору, скільки внутрішній стан готовності суб'єкта, тобто міру самореалізації.

Таким чином, пізнавальна активність як педагогічне утворення має власне "смислове поле", структуру, конкретну динаміку й закономірності розвитку.

§2. Стимулювання навчальних інтересів у процесі групової навчальної діяльності учнів

Відомо, що дієвим стимулом розвитку пізнавальної активності школярів є інтерес.

Вчення про інтерес у педагогіці й психології дуже складне й невизначене, та й трактування поняття "інтерес" видається дуже суперечливим. Це пояснюється перш за все складністю самої суті інтересу, який дійсно виступає перед нами різними своїми сторонами.

Як складне і дуже знайоме для людини утворення, інтерес має багато трактувань і розглядається як:

- вибіркова спрямованість уваги людини (М.Ф. Добринін, Т. Рибо);
- виявлення його розумової й емоційної активності (С.Л. Рубінштейн);
- активізатор різноманітних почуттів (Д. Фрейер);
- особливий сплав емоційно-вольових та інтелектуальних процесів, який підвищує активність свідомості і діяльності людини (Л.О. Гордон);
- структура, що складається з потреб (Ш. Бюлер);
- активне пізнавальне (В.Н. М'ясищев, В.Г. Іванов), емоційне-пізнавальне (Н.Г. Морозова) ставлення до світу;
- специфічне ставлення особистості до об'єкта, викликане усвідомленням його життєвого значення й емоційною привабливістю (О.Г. Ковалев).

Кожне з наведених визначень поняття інтересу, розглядає його або як особистісне утворення, або як спонукальну дію, що викликає активний зв'язок людини з оточуючим світом. Сучасні філософи й психологи розглядають проблему інтересу в світлі проблеми цінностей. Це дозволяє бачити в людині, її змісті важливе джерело розвитку особистості, яка через вибіркове ставлення до оточуючої дійсності знаходить в інтересі натхнення, набуває творчих сил, долає труднощі на шляху до досягнення мети.

Розглядаються п’ять видів інтересу до навчання: широкий, недиференційований, пов’язаний із постановкою певних цілей, результативний, тобто спрямований на досягнення конкретних цілей, процесуально-змістовний, тобто включений до складу навчального предмета і процесу його засвоєння; навчально-пізнавальний – найвищий за своїм рівнем, який виражає прагнення школяра вдосконалювати свою навчальну активність.

Серед усіх видів інтересу пізнавальний інтерес займає особливе місце, бо є важливою галуззю загального феномена інтересу. Це пояснюється тим, що його предметом виступає найважливіша властивість людини: можливість пізнання оточуючого світу. Пізнавальний інтерес, якщо його включити в пізнавальну діяльність, пов’язаний також із формуванням різноманітних особистісних стосунків. Саме на цій основі формуються світорозуміння, світогляд, активному характеру яких сприяє пізнавальний інтерес. Він, як інтегральне утворення особистості, має дуже складну структуру, яку складають як окремі психологічні процеси: інтелектуальні, емоційні, регулятивні, синемічні, так й об’єктивні та суб’єктивні зв’язки людини зі світом, виражені в стосунках.

Виникає нагальна потреба у створенні таких видів навчальної діяльності, в такій формі організації процесу навчання в школі, які б дозволили виявитися інтересам учнів максимально.

Одна з таких форм – групова діяльність школярів як на уроці, так і в позаурочний час. Підтвердженням цьому служить те, що:

1. Сама форма організації спільної діяльності змушує психічні процеси, включені в інтерес, протікати більш інтенсивно. Створюється особливий тонус діяльності: думка-участь, думка-дія, думка-переживання, які містять у собі радість від процесу навчання. Виникає прагнення заглибитися в пізнання й тим самим заявити про себе як про людину, яка знає те, що не знають інші, тобто самоутвердитися.

2. Тісна взаємодія учасників групи створює групове поле інтересів, в якому переплітаються особисті інтереси кожного й утворюється більш насичений у змістовному відношенні вектор загальної групової зацікавленості. Виникає ситуація, коли учень може своєю захопленістю зацікавити своїх однокласників. У цьому випадку інтерес виступає як більш енергійний активатор діяльності, навчальних і творчих дій.

3. Групова форма діяльності підвищує вплив емоційного фактора на пізнавальний інтерес. Більш високий ступінь емоційної насиченості при виборі навчального завдання, способу роботи, самооцінки – іншими словами, підвищення "емоціогенності" всіх компонентів навчальної діяльності в групі – немалою мірою впливає на становлення пізнавального інтересу.

Таким чином, можна впевнено стверджувати, що пізнавальний інтерес при груповій формі діяльності розширює сферу виявлення вже сформованих інтересів учнів, сприяє виникненню нових захоплень, створює умови для більш повної самореалізації особистості через обмін зацікавленістю.

Групова навчальна діяльність заохочує до пошуку, збільшує можливість особистісного відкриття, створює умови для відшукування оригінального, цікавого підходу у вирішенні поставленого завдання. Активніше працюють уява, фантазія, розвивається інтуїція, і все це найпозитивнішим чином впливає на пізнавальний інтерес учнів. Розвиваючи свій пізнавальний інтерес, учень мовби виходить за рамки захисної реакції, починає не боятися думати, виявляє сміливість при вирішенні навчальних завдань, стає "особистістю, яка самоактуалізується" (цей тип особистості був виділений американським ученим А. Маслоу, "особистостями, які самоактуалізуються", він назвав людей, котрі домагаються успіхів у самостійній творчості і здатні до повноцінного спілкування).

На нашу думку, при груповій формі навчальної діяльності основними функціями мотиву є: спонукальна функція, змістоутворювальна й пояснювальна. Кожна з перерахованих функцій характеризується особливим механізмом розвитку пізнавального інтересу. Наприклад, спонукальна функція розглядається нами як умова наявності широкої різноманітності індивідуальних мотивів, які при груповій формі діяльності виступають "зустрічними стимулами", розширюючи тим самим межі пізнавального інтересу кожного учасника групи.

Виходячи з передумови, що для особистості визначальною є власна внутрішня активність, ми намагалися створити такі умови участі учня в груповій діяльності, коли прояв його активності різноманітний за формою й максимально насичений за змістом. Ідея полягала в тому, що учень є одночасно членом кількох груп, тобто в варіативності його групового представництва. Так, на уроці математики він член однієї групи, на уроці історії – іншої і т.д. Така організація участі учня у діяльності груп, хоча й регламентує виявлення його пізнавального інтересу, але, і це, на наш погляд, головне, створює “зони” його максимальної активності. Крім цього, кожен учень є ще й членом так званих “груп за інтересами”, які організовуються для участі в громадському житті. Якщо в першому випадку членство в тій чи іншій групі визначене навчальними здібностями учня, то “групу за інтересами” учень обирає сам, виходячи з особистісного інтересу. “Групи за інтересами” створюють на півріччя. Через півроку учень знову має можливість виявити себе в іншому напрямі своєї діяльності, ставши членом нової для нього групи.

Отже, створюючи “групове поле інтересів” як відкриту, незамкнуту систему, що трансформується залежно від цілей і виду діяльності, ми тим самим створюємо умови не тільки для розвитку пізнавального інтересу, а й для залучення школярів до більш активної пізнавальної діяльності взагалі.

Таким чином, незаперечним є те, що стимулювання пізнавального інтересу при груповій формі навчальної діяльності сприяє підвищенню власної внутрішньої активності учня. Новим, на наш погляд, у стимулюванні пізнавального інтересу при груповій роботі учнів є створення “групового поля за інтересами” не тільки у виховній роботі, але й під час навчальної діяльності. Очевидним визначається факт впливу підвищення “емоціогенності” всіх компонентів навчальної діяльності на становлення пізнавального інтересу учнів при групові формі діяльності.

§3. Педагогічні можливості розвитку пізнавальної активності молодших підлітків в процесі групової позаурочної діяльності

Дослідження впливу групової форми діяльності на розвиток пізнавальної активності молодших підлітків здійснювалось на основі системно-структурного аналізу. У ході проведення експерименту об’єкт дослідження розглядався нами як система певних елементів, встановлення залежності між якими дозволило виділити системно-утворюючі зв’язки, тобто фактори, що визначають позитивні зміни.

Основним методом дослідження ми обрали моделювання психолого-педагогічної взаємодії, умов активної навчально-пізнавальної діяльності учнів, тобто створення так званого “розвиваючого середовища”. Особливе значення приділялося педагогічному експерименту, який проводився з метою перевірки робочої гіпотези і виконання завдань дослідження. Педагогічний експеримент має величезну перевагу перед іншими методами педагогічного дослідження тому, що уявляє собою відкриту систему, яка дозволяє створювати експериментальні ситуації, побудовані відповідно до гіпотези, і не тільки фіксувати одержані результати, але й коректувати, в міру необхідності, хід самого експерименту. Відмінною особливістю експерименту, який ми проводили, було те, що експериментатор, здійснюючи його, одночасно виступав і в ролі дослідника-учасника і в ролі дослідника-керівника. Це дозволило більш ґрунтовно провести сам експеримент, моделюючи необхідні ситуації й коригуючи їх із врахуванням особистісних характеристик тих, хто випробувався.

При проведенні експерименту ми дотримувалися такої методики :

1. Проведення попереднього цілеспрямованого спостереження за явищами, які вивчалися, з метою остаточного визначення гіпотези.
2. Створення умов для проведення експерименту (підготовка і навчання дітей навичкам роботи в групі).
3. Ретельна розробка процедури проведення експериментальної роботи.
4. Систематичні спостереження за ходом експерименту.
5. Проведення систематичної реєстрації фактів різними засобами і зіставлення одержаних результатів.
6. Створення ситуацій, які повторюються, зі змінами характеру умов їх протікання (спочатку робота в групах за інтересами, а потім у групах, створених із врахуванням типології навчальних можливостей учнів).
7. Перехід від експериментального вивчення до логічного узагальнення.

Перед педагогічним експериментом стояло завдання з допомогою фактів підтвердити або відхилити вихідні положення дослідження впливу групової навчальної діяльності на розвиток пізнавальної активності молодших підлітків.

Перш, ніж вдатися до експерименту, ми уважно вивчили наявні у педагогічній літературі методики та результати досліджень групової роботи учнів і з'ясували, що всі вони мали позитивні результати, але головна увага в цих дослідженнях зосереджена на організаційних питаннях групової роботи, самі дослідження були короткотривалими або ж здійснювалися з невеликою кількістю учнів, і зовсім недавно в науковій літературі з'явились праці Ярошенко О.Г., які описують результати дослідження тривалого педагогічного експерименту, метою якого є всебічна перевірка ефективності діяльності малих груп у навчанні хімії [29; 30].

Ми вдалися до здійснення довготривалого експерименту, термін проведення якого становив три роки. Щоб зберегти природність експерименту, забезпечити його плавне входження в життя експериментального класу, ми дотримувалися чотирьох умов :

а) діяльність в умовах експерименту була добре продумана і ретельно спланована;

б) завдання для групової роботи були органічною частиною змісту навчальних завдань;

в) групова навчальна діяльність забезпечувала диференційований підхід у самій групі, а не лише поділ на типологічні групи;

г) експеримент проводився у класі, де експериментатора учні добре знали.

Етапи проведення експерименту (5 – 7 кл.)

- ***І етап – підготовчий***

1. Попереднє цілеспрямоване спостереження за контрольним та експериментальним класами.
2. Проведення комплексно-діагностичних заходів по вивченню психологічних особливостей розвитку учнів двох класів, що брали участь в експерименті.
3. Остаточне визначення ходу проведення експерименту.
4. Створення умов у класних колективах для проведення експерименту.

- ***ІІ етап – концептуально-організаційний***

1. Створення в експериментальному класі груп за інтересами.
2. Проведення позаурочної виховної роботи в експериментальному класі лише на основі групової діяльності.
3. Проведення необхідних діагностичних досліджень.
4. Підготовка учнів до подальшої групової роботи, але вже в навчальній діяльності з утворенням інших групових об’єднань.

- ***ІІІ етап – розвивально-формуючий***

1. Організація навчання молодших підлітків у складі малих груп.
2. Поєднання роботи груп за інтересами, використовуваних у позаурочній виховній роботі, з групами, організованими для роботи на уроці.
3. Проведення необхідних діагностичних досліджень.

- ***ІY етап – результативно-узагальнюючий***

1. Аналіз результатів експерименту.
2. Визначення обґрунтованості експерименту.

Експеримент проводився на базі Кіровоградської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 16. Для експерименту були обрані 5-А і 5-Б класи, які в кількісному відношенні і за рівнем успішності (враховувалися річні оцінки за 3 кл.) були майже однаковими (див. табл. 2.1)

Таблиця 2.1

Рівень успішності	**5-А кл. (контрольний)**	**5-Б кл. (експериментальний)**
високий	10	8
достатній	21	20
середній	3	6
початковий	1	2

Необхідно відзначити ще одну суттєву деталь: ці два класи не були колишніми колективами третього класу і складалися з дітей, які навчалися в різних п'яти класах, тобто мали різних учителів. Це сам по собі дуже важливий момент у проведенні експерименту, бо утворення груп на початку навчального року у класі йшло паралельно з утворенням класного колективу.

Проведення експерименту почалося з вивчення навчальних можливостей учнів контрольного та експериментального класів. Серед рівнів навчальних можливостей учнів, крім загальноприйнятих: В – вищий, С – середній, Н – низький, нами був запропонований ще рівень НВ – найвищий, який дає змогу спостерігати ті позитивні зміни, які відбуваються у групі учнів з вищим рівнем навчальних можливостей.

Подальша робота полягала в формуванні груп. У цьому питанні серед дослідників немає єдиної думки. Перераховується велика кількість фактів, які необхідно враховувати: взаємостосунки, рівень знань, індивідуально-психологічні особливості, наявність лідера у групі, специфіка навчального предмета і т.д. Дж.Хесард вважає, що група повинна відображати профіль класу, тобто у своїй мініатюрі відтворювати за можливості всі характеристики класу [25]. Цю ідею, яка стосувалася в основному навчальної діяльності, ми розширили, вирішивши створити групи за інтересами для участі в позаурочній навчальній діяльності. Обов'язковою умовою формування груп за інтересами ми вважали наявність у них учнів, що мають різний рівень позанавчальної інформованості.

Перед нами стояло конкретне завдання – навчити п'ятикласників груповій формі роботи. З власного досвіду роботи у школі відомо, що учні цього віку просто елементарно бояться працювати в групах на уроці. Ми розуміли, що необхідно спочатку навчити учнів працювати в групі з матеріалом, який для них цікавий, щоб уникнути почуття страху і невпевненості, а потім перенести одержаний дітьми досвід на інші види групової діяльності. Але головне – необхідно було сформувати стійку потребу в груповій діяльності. Виходячи з цього, групи в експериментальному класі створювалися спочатку лише для участі в позаурочній навчальній діяльності.

Далі ми більш детально зупинимося на питанні формування груп для навчальної діяльності на уроці, а зараз тільки відзначимо деякі важливі моменти в процесі формування груп за інтересами. Особливу роль при цьому відіграли анкетування й дослідження шкільного психолога. Так, результати проведеного нами анкетування багато в чому співпали з результатами дослідження шкільного психолога, дозволивши нам одержати об'єктивну інформацію.

Учням контрольного й експериментального п'ятих класів через два місяця після початку навчального року було запропоновано анкету, що складалася з таких запитань:

1. Назви уроки, на яких тобі цікаво.
2. Який шкільний предмет подобається тобі більше, або менше всього ?
3. Кого в класі вважаєш:
   - розумним ;
   - веселим ;
   - чесним ;
   - таким, що вміє організувати будь-яку справу ?
4. Скільки у тебе друзів у класі ?
5. Назви найбільш популярних учнів класу.
6. Назви, до кого в класі ти байдужий.
7. Як ти думаєш, кого в класі люблять більше і за що ?
8. Якби тобі доручили виконати дуже важливу справу, то з якими учнями класу ти хотів би робити це разом ?

Результати анкетування були цікавими, а відповіді на запитання – навіть несподіваними. Вражало те, що провчившись разом всього лише два місяця, учні виявилися добре інформованими один про одного і досить об'єктивно оцінювали особистісні якості своїх товаришів по класу. Їхні оцінки стосовно розумнішого, чесного, веселого, такого, який володіє організаторськими здібностями, багато в чому співпадали з нашими уявленнями.

Серед предметів шкільного курсу, які учні назвали як найбільш улюблені, виявилися: математика, історія, біологія, українська література, фізкультура. Враховуючи це учням було запропоновано утворити групи за інтересами кількістю 6-7 чоловік у кожній. Відомо, що мала група слабко сприяє розвитку соціальної організації і має більш обмежені ресурси для поліпшення результатів роботи, а надто велика група не дає можливості використати ресурси всіх її членів, тому ми вирішили, що така кількість учнів у групі оптимальна для проведення даної діяльності.

На початку наступного року (6кл.) було проведено анкетування, яке включало в себе питання 1-8 анкети минулорічної, і були доповнені такі запитання:

9. Чи хотів би ти зараз учитися в іншому класі ?
10. Ти став краще, гірше чи залишився таким же ?
11. Чи задоволений ти життям класу в минулому році ?
12. Тобі цікаво було вчитися в п’ятому класі ?
13. Як ти вважаєш, клас став кращим чи залишився таким, як і був ?

Нехай не здається необґрунтованим таке захоплення анкетуванням, але поряд із безпосереднім спостереженням за змінами, які відбувалися у контрольному й експериментальному класах, саме анкетування дозволило прослідити динаміку змін, що спостерігаються, і зробити необхідні для подальшого проведення експерименту висновки.

Дані анкети показали, що в експериментальному класі всі діти вважали свій клас найкращим і ніхто не збирався переходити в інший. У той же час у контрольному класі були так звані “ображені” діти. Більшість учнів експериментального класу вважали, що життя класу було цікавим і сам клас став кращим. Змінилося уявлення учнів про тих, кого в класі люблять і до кого байдужі.

Результати наших спостережень, анкетування, бесід із вчителями, батьками і самими учнями, дозволили зробити такі висновки:

1. При груповій формі діяльності в класі збільшується кількість популярних учнів, тобто участь учня у роботі групи сприяє його самовираженню, самовияву, розвитку всіх властивостей особистості.
2. Така форма діяльності не змінює уявлення учнів про загальнолюдські властивості однокласників, але змушує по-новому оцінювати їх ділові якості: якщо в п’ятому класі “ображеними” вважалися ті учні, які погано вчаться, то через рік до таких відносили тих, хто не вміє працювати у групі, у кого відсутнє вміння спілкуватися, слабко розвинуті організаторські здібності.
3. Зростає коефіцієнт особистої інформованості.

4. Спостерігається ефект “корпоративності”. Так ми назвали почуття гордості, яке виникло в учнів експериментального класу, за те, що вони представники саме цієї групи, саме цього класу.

Крім того, у ході проведення I та II етапів дослідження одержано підтвердження таких положень:

- Групова діяльність створює умови для більш повного самовираження учня, що в свою чергу пов’язане з його інтенсивною пізнавальною діяльністю. Залучення учнів до “проблемно-пошукового поля” групової роботи сприяє розвитку їх пізнавальної активності.
- Знаходячись у полі інтенсивного впливу з боку членів групи, учень відчуває постійну потребу в самоорганізації своїх інтелектуальних і вольових процесів. “Інтерес, наповнений думкою” – так образно можна назвати той стан, в якому він знаходиться в процесі групової взаємодії. “Групове інформаційне поле” дозволяє побачити взаємозв’язок між пізнавальною активністю учня та його інформаційно-пошуковою діяльністю. Бажання школяра самостійно знаходити необхідну для всієї групи інформацію стимулює його пізнавальну активність. Отже, при груповій діяльності одним із показників пізнавальної активності учнів може виступати рівень інтенсивності його інформаційно-пошукової діяльності, тобто коефіцієнт міри особистої участі в “груповому інформаційному полі”.
- Важливим результатом I етапу проведення експерименту можна вважати наявність в учнів первинних навичок і вмінь будувати й реалізовувати власну діяльність у групі; вдосконалюється вміння спілкуватися, разом знаходити рішення поставленого завдання.
- Відбувається обмін діяльностями і діяльними здібностями на рівні свідомо організованого співробітництва.

Таким чином, “…у груповій діяльності складаються сприятливі умови для виникнення новоутворень особистості, яких до цього не було у даного індивіда, але котрі є, або вже складаються в інших членів групи, і які відповідають рівню групового розвитку і підтримують цей рівень” [18, с.64].

§4. Комплектування груп на основі конструювання простору міжособистісних координацій при груповій організації навчальної діяльності

III етап нашого дослідження був пов’язаний з організацією нових за складом груп для навчальної діяльності на уроці зі збереженням поперед нього складу групи для участі в позаурочній груповій діяльності.

Суть подальшого проведення експерименту полягала в тому, щоб навчити учнів новим способам групової діяльності. Цілком зрозуміло, що оскільки людина – діяльна істота, то для її розвитку вирішальне значення має саме зміна характеру діяльності.

Розширюючи і насичуючи новим змістом "поле" діяльності молодших підлітків при груповій організації діяльності на уроці, ми переслідували кілька цілей. По-перше, створити найсприятливіші умови для найбільш повного саморозкриття і самовираження особистісних якостей учня. По-друге, поставити дитину перед розв'язуванням проблеми вільного вибору особистого темпу просування в одержанні знань. По-третє, визначити, як впливають на виявлення пізнавальної активності попередні два фактори.

О.Г.Асмолов у свій час звернув увагу на те, що "діяльність визначає особистість, але особистість обирає ту діяльність, яка її визначає" [2, с.48]. Отже, пропонуючи молодшому підлітку самому обирати види діяльності у тій чи іншій групі, ми завідомо ставимо його в позицію активної дії. Самовизначаючись і самовиражаючись, учень не може залишатися пасивним. Тому існує явний зв'язок між бажанням учня брати участь у роботі кількох груп, його прагненням виявити себе і рівнем пізнавальної активності.

Можливість молодшого підлітка одночасно бути членом кількох груп знімає головне зауваження дидактів стосовно групової навчальної діяльності, що склад груп залишається без змін. Так, у післямові до книги В.Оконя читаємо "... навіть у невеликих групах (по 4-5 осіб) активну участь у розв'язанні проблеми бере лише один (інколи два) із найбільш підготовлених учнів і набуває повноцінних знань... Учні, які одного разу зайняли другі ролі у процесі розв'язання проблеми, не зможуть у подальшому самостійно змінювати своє навчальне становище в групі, залишаючись постійно у ролі помічників... Можливе створення таких груп не для постійної навчальної роботи, а лише для вирішення окремих дидактичних завдань. При цьому в різні періоди учні братимуть участь у різних групах і виконуватимуть у них різні функції – від допоміжної до керівної"[16, с.199-200].

Практикою встановлено, що найбільш продуктивно працюють ланки, сформовані з учнів з високими навчальними можливостями, не можуть успішно функціонувати ланки, сформовані з учнів з низькими навчальними можливостями. І далі позитивний ефект у навчанні учнів найбільш повно досягається в гетерогенних групах. У цих групах учні, володіючи різною здатністю до навчання, потребами, інтересами і навчальною працездатністю, доповнюють один одного. Один виявляє підвищений інтерес до теоретичних узагальнень, другий володіє сукупністю практичних умінь, третій найбільш критичний. Він частіше ставить запитання, прагне обґрунтувати кожне положення. Учні з найвищими і вищими навчальними можливостями при самостійній роботі, як правило, встигають виконати завдання за більш короткий строк, завдяки чому у них знаходиться час для надання допомоги іншим.

У своїх дослідженнях ми пішли дещо іншим шляхом: групи для роботи на уроці були складені з учнів, що мають однаковий рівень навчальних можливостей. Прийняття такого рішення базувалося на таких висновках дидактів і психологів, пов’язаних з особливостями пізнавальної діяльності в ситуаціях безпосереднього спілкування:

А - Брушлинський А.В. вказує на те, що “висловлені окремими членами групи думки, ідеї, гіпотези можуть впливати, або не впливати на процеси мислення партнерів. Вони виявляються підказками лише в тих випадках, коли людина просунулася у своєму розумовому процесі настільки, що може включити нову ідею в систему зв’язків і стосунків, які вже в неї склалися. Нова ідея не впливає на розумовий процес, якщо людина ще не готова, не здатна включити її в свою систему зв’язків і стосунків. Це означає, що нова ідея сама по собі не піднімає процесу мислення всіх членів групи на загальний рівень, який може бути досягнутий тільки у випадку збігу, або зближення їх змісту мислення” [5].

Ми вважаємо, що перевага гетерогенних груп порівняно з гомогенними і начебто їх більша результативність пояснюється тими завданнями, які ставилися перед групою в процесі навчання, - ідеєю взаємодопомоги. Взаємовідношення в групі учнів, які мають різні навчальні можливості, у своїй суті виглядало так: якщо ти виконав завдання, допоможи тому, хто ще з ним не впорався. Але час диктує інший стиль життя і ставить перед шкільною освітою нові завдання. Сьогодні учень повинен прагнути до найбільш повної реалізації всіх своїх можливостей, того, що йому відпущене природою. Щоб продуктивно й результативно працювати в групі, учень повинен знаходитися в “полі” однакової групової “інтелектуальної напруги”. “Колективне думання”, як показав експеримент, у таких групах відбувається значно інтенсивніше, бо члени групи розуміють, що всі вони вчаться однаково, розраховувати потрібно тільки на свої сили і самостійно шукати рішення поставленого завдання. У цьому випадку в групі відбувається інтенсивне посилення персоніфікації об’єктивно існуючих у завданні зв’язків і стосунків різними членами групи, спостерігається так званий феномен “зближення змісту партнерів”. У гетерогенних групах розрив між рівнем мислення її членів не дозволяє учням, які мають слабкі знання, інтенсивно брати участь у “груповому полі інтелектуальної діяльності”, що в свою чергу порушує нормальний хід процесу самоактуалізації і самореалізації у таких учнів.

Б - Згідно з концепцію символічного інтеракціонізму Г.Міда, становлення людського “Я” відбувається в ситуації спілкування, і інтеріоризація діалогу складає джерело розумової активності. Ситуація спілкування – це разом із тим ситуація спільної діяльності. Інакше кажучи, для Г.Міда ситуація навчання розкривається як ситуація перш за все взаємодії і, крім того, міжособистісні стосунки також “дано” у взаємодії. Теза про конструювання у взаємодії простору міжіндивідуальних координацій стала теоретичною основою для створення певної системи взаємодії членів як усередині групи, так і між групами в процесі навчальної діяльності на уроці.

Педагоги-дослідники, які займалися проблемою групової діяльності на уроці, особливу увагу приділяли розміщенню учнів у ланці за навчальними партами. Загальноприйняте і вважається раціональним таке розміщення (за І.М.Чередовим) учнів під час групової діяльності на уроці:

1 ланка		**2 ланка**		**3 ланка**	
3	2	3	2	3	2
4	$\boxed{1}$	4	$\boxed{2}$	3	$\boxed{2}$

де цифрами позначено: 1 – учень з вищими навчальними можливостями; 2 – з високими; 3 – з середніми; 4 – із низькими; □ - ланковий.

Нами розроблена зовсім інша система розміщення учнів у класі при груповій навчальній діяльності. Таку схему багато в чому підказало саме шкільне життя. Експериментальний клас – звичайний клас у загальноосвітній школі. І потрібно було виробити для учнів цього класу “режим сприятливої взаємодії” тобто, коли учень запитує неясне й одержує пояснення, виникало якомога менше шуму. Адже в класі – 36 учнів! Розташування груп у класі має такий вигляд (див. схему 1.3.).

Схема 1.3

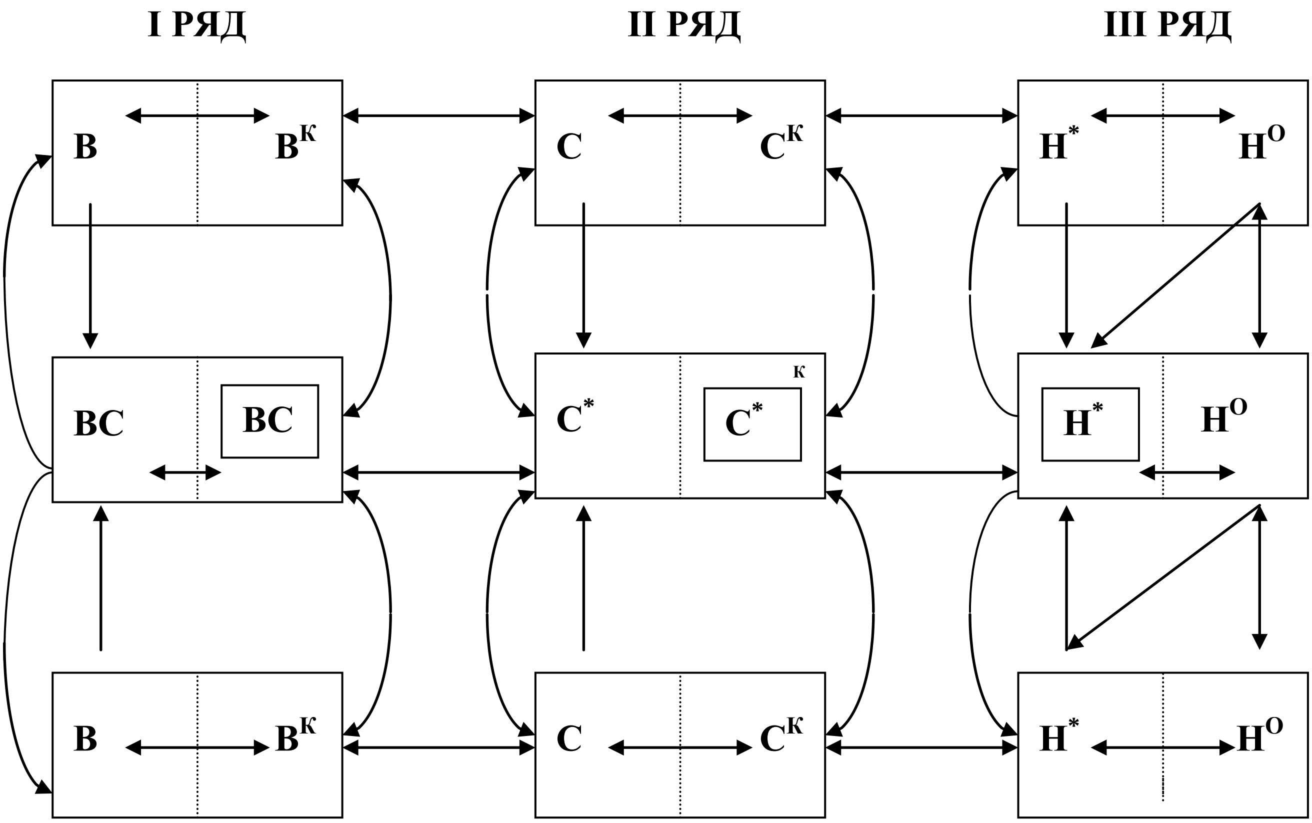


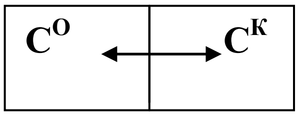
Схема конструювання простору міжособистісних координацій при груповій навчальній діяльності на уроці.

Буквами позначено : НВ – учні, які мають найвищі навчальні можливості, В – вищі, С – середні, Н – низькі, $НВ^К$, $В^К$, $С^К$ – консультанти; $С^*$, $Н^*$ - учні, які мають у своїй групі більш високі навчальні можливості; $С^О$, $Н^О$ – що вимагають у своїй групі додаткової допомоги; - головні консультанти; стрілочками показано механізм взаємодії між членами груп.

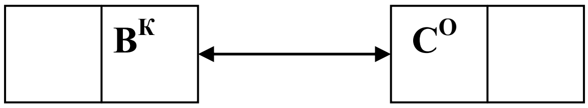
Запропонована нами модель суттєво відрізняється від загальноприйнятої. Традиційно ланка при груповій діяльності на уроці складається із чотирьох осіб, які мають різні навчальні можливості. У нашому випадку мінігрупа об’єднує шість учнів одного рівня навчальних можливостей, але всередині цієї групи чітко враховується принцип диференціації, і на його основі спроектовано «особистісне поле взаємодії» кожного члена групи.

Важливо відзначити, що ще однією відмінною особливістю функціонування гомогенних груп (у розробленій нами системі) є утворення всередині групи так званих «рухливих угрупувань» - діад і тріад, склад яких може змінюватися.

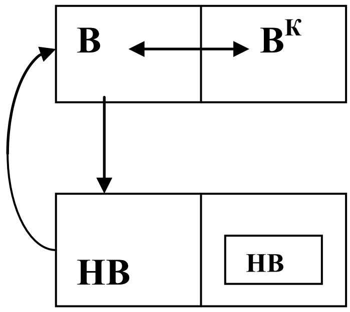
Види діад :



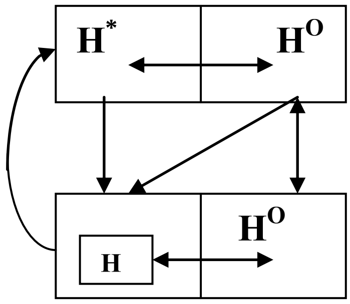
або



Види тріад :



або



Існування “рухливих угрупувань”, як показав експеримент, дозволяє гомогенній групі нарощувати свій діяльний і змістовий потенціал. Хорошим прогнозом у плані установлення групового суб’єкта діяльності є утворення угруповань (діад, тріад) усередині груп.

У ході проведення експерименту було відзначено, що :

1) взаємодія учасників групи при такій організації їхньої навчальної діяльності є не тільки предметно-спрямованою, а й суб’єктно-спрямованою;
2) робота в групі будується на гуманістичних принципах : кожен учень – рівноправний член мікроколективу;
3) “особистісний простір” при даному “просторовому розташуванні членів групи” створює умови для більш живого й насиченого спілкування, що в свою чергу значно збільшує коефіцієнт власних пізнавальних надбань, посилюється пізнавальна активність, формується інтерес до виконання все нових і більш важливих завдань, при вирішенні яких зростає впевненість у своїх силах;
4) “особистісний простір” кожного члена групи складається не тільки з діяльності, що виконує функції спілкування, але, і це головне, з діяльності, спрямованої на побудову й реалізацію власної діяльності; при цьому у школярів виявляється відчуття особистої свободи, виникає бажання самому розібратися, а вже потім звернутися по допомогу; свобода вибору дій є могутнім стимулом для розвитку пізнавальної активності молодших підлітків при груповій навчальній діяльності.

Зупинимося більш детально на питанні комплектування груп для групової навчальної діяльності. Ми розділяємо думку О.Г.Ярошенко про те, що “оптимальний розмір малої групи не може бути встановлений без його співвідношення з характером і кінцевою метою діяльності, тому кожен вид групової діяльності має свій оптимальний розмір групи" [29, с.12]. Кількісний склад нашої малої групи – 6 осіб, визначався саме суттю спроектованого нами "поля групової діяльності".

Поділу учнів на групи передувала велика робота по вивченню їх індивідуальних особливостей і навчальних можливостей, а також підготовча робота з самими учнями протягом усього п'ятого класу.

Існує думка, що при поділі на групи корисно надавати самим учням свободу вибору варіантів. Ми переконалися, що починати потрібно з роботи по варіантах, які пропонує вчитель, і поступово привчати школярів до правильного вибору посильних, але в той же час достатньо важливих завдань. Адже для переходу до вільного вибору варіантів учні повинні мати сформовані навички оцінювання їх складності, необхідні навички самооцінки. Ми вчинили так : протягом цілого навчального року в учнів формувалося вміння самостійно оцінювати рівень складності навчальних завдань і свої можливості для їх вирішення. На кінець навчального року учні в класі досить об'єктивно ідентифікували себе як представників тієї чи іншої групи залежно від навчального предмета, виробивши в своїй більшості певний індивідуальний стиль самостійної діяльності.

При такому підході до поділу на групи не мало місце кривдження учня. Все, що відбувалося, носило гуманістичний характер : групи формувалися для роботи на уроках з різних навчальних дисциплін, і тому ті діти, які, наприклад, з математики потрапляли в групи С і Н, мали можливість стати членами групи В чи навіть НВ при вивченні іншого шкільного предмета. В експериментальному класі було виділено такі типологічні підгрупи $НВ_1$, $НВ_2$, $В_1$, $В_2$, $С_1$, $С_2$, $С_3$, $Н_1$, $Н_2$, $Н_3$. Це дало можливість здійснити внутрішньогрупову диференціацію. Розглядаючи здатність до навчання як комплексний показник, що включає в себе шість параметрів: 1) темп просування в новому матеріалі; 2) особливості спілкування та абстрагування ознак; 3) економічність мислення; 4) гнучкість мислення; 5) самостійність мислення; 6) ступінь усвідомленості індивідуумом своїх дій, а працездатність як здатність наполегливо працювати і ставлення до навчання, ми тим самим мали можливість для виділення таких типологічних підгруп у кожній з груп НВ, В, С, Н (див. табл. 1.1).

Звичайно, виділені нами групи не є щось застигле, абсолютно стійке, а поділ на підгрупи всередині самої групи не має різкої, нерухливої межі. Всі наведені параметри внутрішньогрупового поділу передбачають наявність у собі деяких динамічних якостей, впливаючи на які, можна досягти кращих результатів. Користь від подібної класифікації учнів при груповій роботі очевидна: за умови продуманого педагогічного впливу й організації цілеспрямованої взаємодії членів групи учні, які погано встигають у навчанні, як правило, переходять у розряд середньовстигаючих, середні стають добревстигаючими, а останні – ще більше знають і вміють.

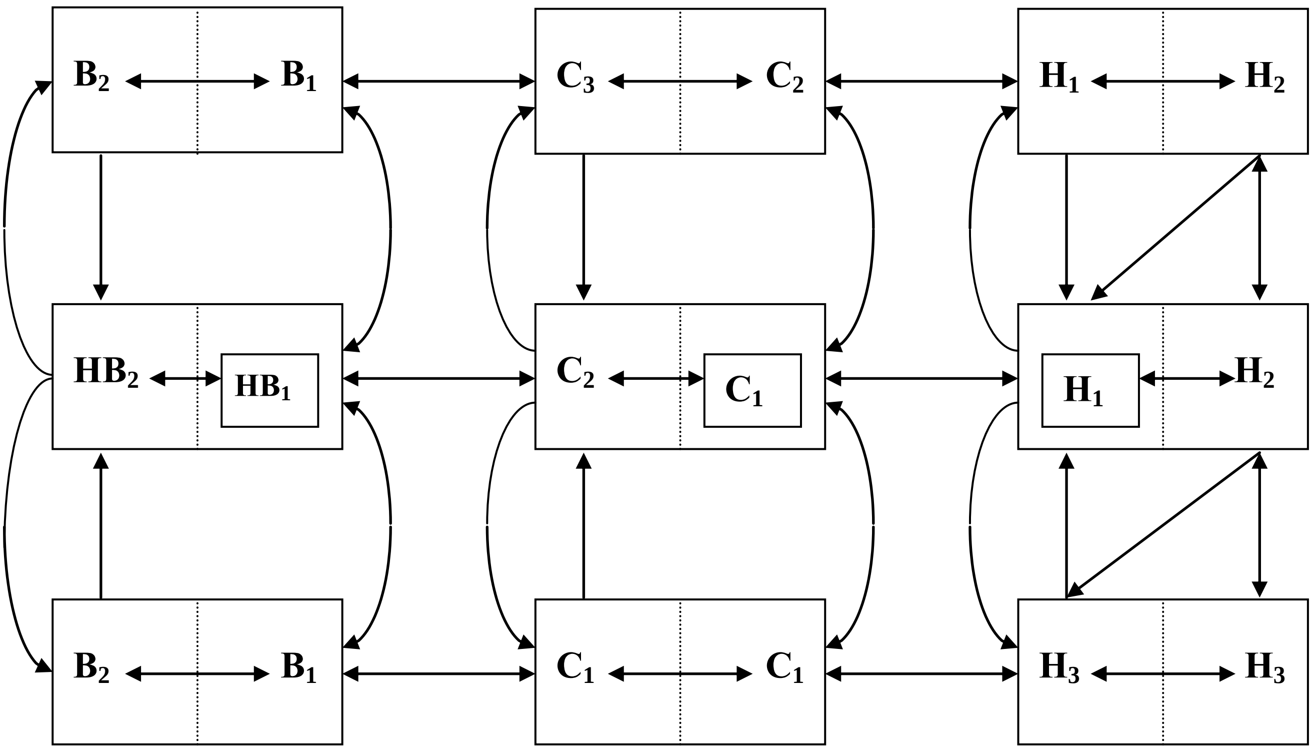
Таблиця 1.1

Група	Внутрішньогрупова диференціація
НВ	**НВ$_1$** темп просування в новому матеріалі високий, мають розвинуті когнітивні і креативні якості, рівень працездатності – високий, почуття самоаналізу й самооцінки достатньо розвинуте, прагнуть самостійно планувати свої дії, комунікативні, так звані лідери віддають перевагу вирішенню творчих навчальних завдань.
	НВ$_2$ володіють усіма перерахованими вище якостями, відрізняючись лише в одному – не претендують на роль лідера у групі, віддають перевагу роботі “для себе”, так звані “яскраві особистості” в групі, до них завжди прислуховуються, бо вони виконують функцію “генератора ідей”, креативні здібності розвинуті більше, ніж когнітивні, уміють працювати в групі, віддають перевагу виконанню творчих і індивідуальних завдань.
В	**В$_1$** темп просування у новому матеріалі високий, когнітивні й креативні здібності розвинуті добре, дещо поступаються в гнучкості мислення попередній групі, але самостійність мислення залишається високою, комунікативні, люблять і вміють ділитися своїми знаннями з іншими, це так звані консультанти; можливий перехід у групу НВ.
	В$_2$ мають усі вище перераховані якості групи В$_1$, поступаючись лише у працездатності, бо через свою натуру є особистостями, які захоплюються, а це призводить до того, що на виконання шкільного завдання у них частіше всього не вистачає часу і воно залишається не закінчиним, тому оцінка не завжди відповідає рівню їх знань.Ця група вимагає з боку вчителя періодичного контролю й індивідуального оцінювання знань, інакше вони можуть втратити віру в себе, одержуючи оцінку нижчу, ніж вони б хотіли
С	**С$_1$** висока здатність до навчання поєднується з середнім рівнем організованості, відрізняються від попередньої групи темпом просування у новому матеріалі, відчуваючи деякі затруднення у вирішенні нових завдань, тобто мають більш низьку самостійність мислення, дещо невпевнені у собі, але дуже швидко освоюють нові прийоми пізнавальної діяльності, якщо їм надають допомогу, когнітивні якості беруть верх над креативними, віддають перевагу репродуктивним завданням, старанні й добросовісні, так звані виконавці, вміють працювати в групі, роблять це спокійно і дружелюбно, мають можливість для переходу в групу В.
	С$_2$ рівень здатності до навчання цієї групи учнів середній, у наявності перевага креативних якостей над когнітивними, винахідливі в організації групової діяльності, але не вміють організовувати свою роботу до кінця, полюбляють виконувати творчі завдання, їх можна вважати неординарними особистостями, тому це так зані “фантазери”, в групі часто створюють ситуації “маленького конфлікту”, але улюблені всіма, інколи виявляють високий рівень працездатності, та це буває рідко.
	С$_3$ представники цієї групи зустрічаються рідко і головною особливістю, яка виділяє їх серед інших членів в групи, є невпевненість у собі, що вкорінилася в свідомість, при достатньо хорошому рівні здатності до навчання, звідси – і більш низький рівень усвідомленості своїх дій; менш комунікабельні, ніж інші члени групи, бояться творчих завдань, хвилюються навіть тоді, коли працюють за зразком, мають потребу не просто в педагогічній увазі, а в цілеспрямованій дії, у групі завжди самітні, трапляється, що переходять у групу Н.

Н	**$Н_1$** рівень здатності до навчання близький до середнього, когнітивні й креативні якості розвинуті недостатньо, рівень самостійності мислення – нижчий за середній, стосовно ставлення до навчання – оптимісти; часто думають, що могли б учитися краще, але якось не виходить, якщо педагогічний вплив буде спрямовано на розвиток у цих учнів індивідуальних способів навчання, то вони легко можуть перейти в групу С; у групі працюють з задоволенням, можуть виконувати роль лідера у своїй групі, але за наявності коригуючої допомоги вчителя.
	$Н_2$ відрізняються від групи $Н_1$ більш низьким рівнем працездатності, відчувають затруднення при переході від самостійної роботи за зразком до репродуктивних і варіативних завдань, але з допомогою членів групи справляються з навчальними завданнями і можуть потім вирішувати базові завдання, представники цієї групи рідко досягають більш високих результатів; завдання яке їм під силу – підтвердити свій рівень успішності.
	$Н_3$ представники цієї групи в класі мало чисельні, їх відзначає низький рівень здатності до навчання, інтерес до навчання низький, або зовсім відсутній; характерна “розумова пасивність”, не вміють працювати в групі, важко знаходять спільну мову з дітьми, та й з боку однокласників ставлення до таких учнів неробозичливе і перехід в іншу групу малоймовірний.

Використовуючи розроблену нами систему типології школярів при груповій роботі, можемо остаточно представити модель простору міжіндивідуальних координацій у такому вигляді (див. схему 1.4)

Схема 1.4



Модель простору міжіндивідуальних координацій при груповій навчальній діяльності на уроці

Таким чином, створена нами система міжособистісної взаємодії при груповій навчальній діяльності на уроці дозволяє планувати певну динаміку й закономірності протікання пізнавальної діяльності молодших підлітків, а, отже, є одним із факторів, які визначають позитивні зміни у розвитку пізнавальної активності учнів, що в свою чергу підтверджує доцільність гіпотези нашого дослідження.

§5. Моделювання "інформаційного поля" уроку при груповій організації навчання

Якщо здійснити ретельний аналіз педагогічних досліджень присвячених методиці організації групової діяльності учнів, то стає очевидним, що навчання у складі малих груп проводилося в основному як організаційна форма навчання тимчасових за складом груп, як епізодичне явище у самому процесі навчання. Групи постійного складу, що працювали разом протягом кількох років, досліджувалися недостатньо.

Мета нашого експерименту якраз і полягала в тому, щоб організувати групову навчальну діяльність як окремий вид пізнавальної діяльності учнів у групах постійного складу і встановити її вплив на розвиток пізнавальної активності молодших підлітків. Учні експериментального класу на протязі кількох років були членами однієї і тієї ж групи, але в той же час і різних, все залежало від того, який шкільний предмет вивчався. Такий підхід до організації групової навчальної діяльності дозволяв змінювати динаміку особистісно-пошукового поля учнів за рахунок більш широкої можливості прояву референтності й ідентифікації особистості з групою. На наш погляд, рівень референтності й ідентифікації особистості з групою у навчальній діяльності можуть розглядатися як показники пізнавальної активності молодшого підлітка.

Серед педагогів-дослідників домінуючою є думка про те, що групова навчальна діяльність найбільш ефективна на уроках закріплення, систематизації та контролю знань. У своєму дослідженні ми намагалися організувати навчальну діяльність у складі малих груп на всіх етапах шкільного процесу навчання. Вирішення поставленого завдання вимагало перегляду багатьох моментів самого навчального процесу. Особливо це стосувалося "інформаційного поля" уроку. Необхідно було наповнити "Інформаційне поле" уроку новим змістом, який би якнайкраще відповідав саме груповій діяльності на уроці.

Дослідницька робота проводилася по таких напрямках :

I – моделювання "інформаційного поля" уроку ;

II – реалізація принципу креактивності в груповій навчальній діяльності учнів.

Підвищення теоретичного рівня наукових знань веде до їх помітної схематизації і формалізації. Характер і зміст образів у сучасному світі, умови їх створення і перебудування в процесі діяльності суттєво ускладнюються і безперервно змінюються. Змінюється і сам процес навчання. Він вимагає від дитини опанування різноманітною знаковою культурою і має намір створення специфічної знакової предметності.

Як засвідчують численні експериментальні дані, мислення не тільки робиться мовним, як стверджував Виготський, воно і візуалізується в міру оволодіння різноманітними знаково-символічними системами. Тому, на нашу думку, всі види навчальної діяльності учнів у складі малих груп повинні бути максимально наповнені діями, основу яких складають одержання нової інформації та її подальше осмислення за рахунок оперування знаково-символічними засобами. Тобто утворюється деяка залежність між сформованістю семіотичної функції і пізнавальною діяльністю. Експериментально така залежність доведена. В контрольному класі ця залежність не зафіксована.

Пояснення нового матеріалу в експериментальному класі було організовано таким чином, щоб спочатку була відпрацьована адекватна до цього теоретичного матеріалу діяльність і лише потім учні могли перейти до самостійної роботи з цим матеріалом. Завершуючи пояснення, вчитель на одному-двох прикладах обов’язково показував учням, як “спрацьовує” теорія, а потім пропонував приступити до самостійної роботи (так здійснювалося навчання в контрольному класі). При цьому він не мав змоги прослідкувати, чим саме користуються учні, виконуючи завдання. На перший погляд, і так усе ясно: чим ще, крім повідомлених у ході пояснення даних, може користуватися учень? Насправді ж усе набагато складніше : учень, наприклад, може безпомилково працювати самостійно, користуючись лише наданим в його розпорядження зразком і зовсім не співвідносити свої дії з викладом теоретичного матеріалу. Подолати протиріччя, яке склалося, можливо, якщо організувати навчальну діяльність певним чином.

Навчальний предмет–математика. Його основу складають знання законів і застосування їх при вирішенні конкретних прикладів. Частіше всього суть закону на рівні його функціонування залишається незрозумілою учнем – просто він діє за зразком. Сильні учні освоюють адекватну до закону дію швидко, а слабкі можуть так і не виконати операційних дій до кінця. Застосовувана нами при поясненні нового матеріалу методика дозволяє самому учню у ході пояснення будувати модель закону, що вивчається, на функціональному рівні (див. табл.1.3).

Необхідно відзначити, що створення такої специфічної знакової предметності в ході пояснення нового матеріалу дозволяє нести елемент диференціації безпосередньо у сам процес пояснення, а це дуже важливо, бо клас працює за групами. У цьому випадку учні груп С і Н не відкинуті за межу нерозуміння, у них є всі можливості працювати над засвоєнням даного поняття або закону самостійно й успішно. Учні груп НВ і В, використовуючи символічний запис закону, можуть зразу приступати до виконання тренувальних вправ, учень, який сумнівається у своїх знаннях, залучається до активного пошуку інформації, зрозумілої для нього і необхідної у подальшій роботі.

Використання знаково-символічного запису закону дозволяє організувати по-іншому й повторення вивченого матеріалу: не як виконання навчальних вправ, а на рівні відтворення його смислової суті. Цілком зрозуміло, що для того, аби яке-небудь знання стало усвідомленим, воно повинне зайняти місце мети дії. В експериментальному класі це досягалось виконанням завдань такого виду: “Поясни дію закону по-своєму, як ти бачиш”. Це завдання творчого характеру, і вони можуть виконуватися учнями в будь-якій формі. Дидактична мета таких завдань – відтворення учнем функціональної сутності закону.

Таблиця 1.3

Як у підручнику	**Як це робилося в експериментальному класі**
(a + b)·c = ac + bc	пояснення для груп НВ і В (□ +Δ)·О = □·О + Δ·О пояснення для груп С та Н (2a+b)·3c = 2a·3c+b·3c = 2a·3c+b·3c= = 6ac+3bc
(a+b)·(c+d) = ac + ad + bc + bd	пояснення для груп НВ і В (□ + О)·(Δ +▱) = = □Δ + □ ▱ + ОΔ + О▱ пояснення для груп С та Н (4a+5b)·(c+2d) = 4a·c+4a·2d+5b·c+5b·2d= = 4ac + 8ad + 5bc + 10bd

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	пояснення для груп НВ і В $(\square + O)^2 = \square^2 + 2\square O + O^2$ пояснення для груп С та Н $(3n+2k)^2 = 3n^2+2\cdot 3n\cdot 2k+2k^2 =$ $(3n)^2 + 2\cdot(3n)\cdot(2k) + (2k)^2 = 9n^2+12nk+4k^2$
$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{\Pi}{\Delta}+\frac{O}{\Delta}=\frac{\Pi+O}{\Delta}$
пояснення на прикладі $\frac{2b^2-1}{b}+b-5=\frac{2b^2-1+b\cdot(b-5)}{b}$	$\Pi+\frac{\Delta}{O}=\frac{\Pi\cdot O+\Delta}{O}$

Психологи встановили, що швидкість сприйняття пов’язана з рухом очей. Активний пошук потрібної для учня інформації змушує його не тільки частіше звертатися до запропонованого знаково-символічного запису, але й сприяє розвитку його індивідуальних особливостей, швидкості й точності сприйняття і переробки інформації. Тому тут доцільно звернути увагу на те, що, розробляючи знаково символічний запис законів, які вивчаються, теорем, правил, ми велику увагу приділяли просторовому розміщенню елементів, котрі до неї входять. Легкий, красивий, не перевантажений запис швидко ідентифікується учнем. Поступово у нього виробляється свій, індивідуальний стиль роботи в “інформаційному полі” уроку, що в свою чергу, дозволяє нарощувати особистісний темп просування у навчанні. Велике значення в навчанні образно індивідуалізованої інформації. Вона може стати основою творчого засвоєння знань і досвіду як при проблемному, так і при звичайному навчанні.

Серед різноманітних видів діяльності зі знаково-символічними засобами для молодших підлітків найулюбленішими стали завдання на кодування. “Кодування у навчальній діяльності передбачає вміння відтворити зміст у знаково-символічній формі. Запровадження кодування в навчальну діяльність дає можливість здійснювати діяльність у різних планах”,- пише Н.Г.Салміна у своїй книзі “Знак и символ в обучении” [22, с.88]. Добре, якщо даний процес має зворотний характер, тобто має місце і подальше декодування інформації.

У навчальній діяльності нами використовувались завдання такого типу: отримані знання учень кодує самостійно і пропонує іншому декодувати запропонований запис. Такий вид діяльності, в ході проведення експерименту встановлено, що мобілізує процес індивідуального “вичерпування” смислової сутності матеріалу, який розглядається на уроці, створює динамічний образ вивченого і можливість неоднозначного його уявлення. Ефективність використання цих завдань на уроках природничо-математичного циклу очевидна. Учням важко здійснювати математичні перетворення, якщо мислимий зміст є відносно нерухомим, жорстким і тому важко піддається переробці і набагато цікавіше бачити перед собою незвичайний запис, який треба і розгадати, і зробити це швидше за інших.

Завдання декодування можуть бути різними. Частіше всього ми використовували завдання, де потрібно було доповнити запис і декодувати його, що в свою чергу обумовлювалось віковими особливостями учнів. Наприклад: (завдання на уроці математики в п’ятому класі). Тут закодовано математичні закони. Постав де потрібно в запису знаки “ + ”, “ - “, “ = ”, (...), “ x “ . Які закони ти розкодував ?

1. $O \square \square O$	$(O + \square = \square + O)$
2. $O \Delta O \square O \Delta \square$	$(O \cdot \Delta \pm O \cdot \square = O \cdot (\Delta \pm \square))$
3. $\frac{O}{\Delta} \frac{\Pi}{\Delta} \frac{O\Pi}{\Delta}$	$\left(\frac{O}{\Delta} \pm \frac{\Pi}{\Delta} = \frac{O \pm \Pi}{\Delta}\right)$

Відзначаючись, здавалося б, своєю простотою, ці завдання несуть у своїй змістовій сутності один дуже важливий момент : щоб якесь поняття було сприйняте адекватно, потрібно, аби воно було побудовано (“сконструйовано”) власними діями. Виконуючи таке завдання, учень не просто вгадує серед уже написаних законів відомі для нього, а й створює динамічний образ схеми дії відповідно до цієї формули.

Такий вид діяльності, як кодування, дозволяє учням включитися у дуже важливий вид діяльності зі знаково-символічними засобами: в переклад реальності на знаково-символічну мову. Так, учні експериментального класу, освоївши цей вид діяльності, легко могли відтворити зміст матеріалу, який вивчався, в знаково-символічній формі. У непідготовлених учнів контрольного класу кодування викликало великі труднощі.

Відзначимо ще один важливий момент у діяльності учнів зі знаково символічними засобами : перехід до різних видів знаково-символічного вираження знань. Завдяки цьому досягається відокремлення форми від змісту, що є надзвичайно важливим для повноцінного засвоєння знань. “ В ефективному навчанні необхідно прагнути до формування різномодальних знань, які можуть бути вираженими у будь-якій формі, відповідно до змісту. Невіддільність змісту від форми при невмінні розділяти їх перешкоджає повноцінному засвоєнню знань” [22, с.218].

В експериментальному класі ми застосували ще один вид діяльності: переведення вербально представленої інформації у різні візуальні системи й у зворотньому напрямі, візуально представленої інформації – в інші знаково-символічні системи.

У ході проведення експерименту ми переконалися в тому, що для успішної роботи групи учнів на уроці необхідна велика кількість різноманітних завдань. Вони повинні відрізнятися від диференційованих завдань для звичайного класу і своїм змістом, і операційною діяльністю. Глибоке дослідження класифікації навчальних завдань при навчанні у складі малих груп з врахуванням типології учнів у педагогічній літературі знайти дуже складно. У нашому дослідженні вирішення цього питання не розглядається як окреме завдання, але мала місце спроба виділити типи завдань, які сприяють розвитку пізнавальної активності молодших підлітків при груповій навчальній діяльності – так цього вимагав сам процес проведення експерименту.

ВИДИ ЗАВДАНЬ :

1. **Завдання , метою яких є розвиток здібностей і вміння працювати в групі.**

- завдання по формуванню здібностей працювати у групі ;
- завдання, які сприяють учню посісти в групі те місце, до котрого він прагне ;
- завдання, мета яких полягає в створені умов для виникнення потреби у новому способі пізнавальної діяльності в групі ;
- завдання на зміну характеру діяльності.

2. **Завдання, метою яких є розвиток пізнавального інтересу до навчання у процесі групової навчальної діяльності.**

- завдання ігрового змісту ;
- завдання на вільний вибір завдання (завдання за бажанням) ;
- завдання з врахуванням позанавчальних схильностей та інтересів до інших предметів ;
- завдання на розвиток вміння ставити перед іншим учнем конкрете завдання чи запитання ;
- завдання на кодування ;

• завдання, що сприяють обміну діяльністю і діяльними здібностями.

3. **Завдання, метою яких є розвиток "Я – свідомості" учня, саморегуляції особистості :**

• завдання на розвиток когнітивних і креативних якостей особистості ;

• індивідуальні і групові творчі завдання ("творчі ситуації") ;

• завдання, які сприяють підвищенню рівня научуваності (логічні проблемні завдання, алгоритмічні приписи) ;

• завдання на створення групового або індивідуального освітнього продукту пізнання ;

• завдання образного й символічного бачення (конструювання понять, правил,тощо).

Особливо зупинимося на завданнях, які у педагогічних дослідженнях згадуються дуже рідко. Дидакти не полюбляють виділяти їх в окремий вид, але як складова частина вони входять у багато видів вправ. Справа йде про завдання, дидактична мета яких формування в учнів уміння чітко, ясно й лаконічно ставити запитання перед своїми однокласниками. Ці завдання ми виділили не випадково. Теоретичні (М.М.Бахтін, В.С.Бібнер, Б.Ф.Ломов, О.М.Матюшкін) й експериментальні дослідження дозволили виділити спеціальну структурну ланку пізнавальної активності, що відбувається перед вирішенням розумових завдань. Ця структурна ланка має самостійну цінність й особливе значення в навчанні. Вона виражається як проблема, сформульована перед іншим учасником мислення, як питання, звернуте до партнера, як завдання, поставлене перед іншою людиною.

Засвоєння нового матеріалу в процесі групової навчальної діяльності пов'язане саме з вмінням запитувати, з можливістю розуміти вивчене через запитання, що ставляться іншому. Але така діяльність використовується в основному при взаємоконтролі знань у групі. Учень запитує іншого учня, ставлячи вже відомі йому й собі запитання й очікуючи від нього відповіді близької до тієї, що є у підручнику. І дуже важко знайти спеціально розроблені завдання, коли суть нового матеріалу осягається в процесі відповіді на поставлені тому, хто вчиться, запитання. Вміти запитувати при поясненні іншого – значить знати самому те, про що ти питаєш. Але можна ще відповідаючи на запитання, оволодівати новими знаннями.

Нами були розроблені завдання, які так і називаються "Запитуючи-пояснюю". Механізм дії завдань стане зрозумілим, якщо розглянути їх безпосередньо. Але відзначимо, що фіксація теоретичних зв'язків і залежностей матеріалу, який вивчається учнем, в таких завданнях відбувається з допомогою саме знаково-символічних образів.

Наведемо приклад такого завдання з курсу алгебри 7-го класу. Тема уроку : "Множення і ділення степенів". Учні груп НВ і В вивчають цю тему самостійно, а потім працюють з учнями груп С і Н за знаково-символічним записом цієї теми, що у них є, ставлячи запитання. Ось так :

ЗАПИС	**ЗАПИТАННЯ**
• $a^2 \cdot a^3$	• Що значить a^2 і a^3
(Учень пише a^2 $a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$)	
	• Тоді поясни запис $a^2 \cdot a^3$
(Учень пише $a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a)$ = А далі ? = $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$	
• $a^2 \cdot a^3 = a^5$ $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3}$	• Який ти можеш зробити висновок, виходячи з цього запису ?
• $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	• А тепер, якщо все зрозумів, доведи мені цю властивість. Тобі важко? Тоді дивись, як все просто і легко.
$\square^n \cdot \square^к =$ $= \underbrace{\square \cdot \square \ldots \square}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{\square \cdot \square \ldots \square}_{к \text{ разів}} =$	• Продовж запис.
(Учень пише = $\square^n \cdot \square^к$ = • А далі ? = $\square^{n+к}$)	
	• Знайди помилку у запису.
• $\Delta^{a+в} = \underbrace{\Delta \cdot \Delta \ldots \Delta}_{в \text{ разів}} \cdot \underbrace{\Delta \cdot \Delta \ldots \Delta}_{a \text{ разів}} = \Delta^{в+a}$	
(Учень відповідає, консультант слідкує за його відповіддю).	
• $\square^x \cdot \square^y = \square^{x+y}$	• А тепер доведи сам.
• $\boxed{2a}^3 \cdot \boxed{2a}^2 =$	Далі учень працює самостійно.

Учні груп НВ і В дуже швидко освоюють такий вид діяльності і, маючи картки запису доведень законів, самостійно працюють зі своїми однокласниками. Ось який вид має картка запису закону піднесення до степеня добутку і степеня :

$$\boxed{\mathrm{I}} \quad (\square \cdot \Delta)^n = \underbrace{(\square \cdot \Delta) \cdot (\square \cdot \Delta) \dots (\square \cdot \Delta)}_{n \text{ разів}} =$$

$$= \underbrace{\square \cdot \square \dots \square}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{\Delta \cdot \Delta \dots \Delta}_{n \text{ разів}} =$$

$$= \square^n \cdot \Delta^n$$

$$\boxed{\mathrm{II}} \quad (-5x)^3 = \boxed{-5}^3 \cdot x^3 = -125x^3$$

$$\boxed{\mathrm{I}} \quad (\square^m)^k = \underbrace{\square^m \cdot \square^m \dots \square^m}_{k \text{ разів}} = \square^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{k \text{ разів}}} = \square^{m \cdot k}$$

$$\boxed{\mathrm{II}} \quad (X^2)^3 = X^{2 \cdot 3} = X^6$$

В експериментальному класі учні груп НВ і В настільки засвоїли цей вид діяльності, що самі, без допомоги карток, пояснюють новий матеріал, змінюючи навіть букви індексів, і роблять вони це з великим задоволенням. За цими картками можна організувати ще один цікавий вид роботи, в основному для учнів груп С і Н. Маючи перед собою картку, слабкий учень ставить запитання своєму консультанту. Виявляється, для учнів груп С і Н це не таке вже й легке завдання. Спочатку кількість запитань не перевищує одного-двох, і, лише накопичивши досвід такої роботи, ці учні починають працювати більш успішно.

Все сказане вище дало підстави зробити висновок, що розвиток пізнавальної активності молодших підлітків у процесі групової навчальної діяльності насамперед залежить від того, яким змістом “наповнене” “інформаційне поле” уроку і в якій мірі цей зміст відповідає динаміці самої групової діяльності. Одержання нової навчальної інформації та її подальше осмислення за рахунок оперування знаково-символічними засобами сприяє підвищенню пізнавальної активності і тих учнів, які навчаються добре, і тих, для кого навчання – нелегка справа. Залежність між сформованістю семіотичної функції і пізнавальною активністю учнів встановлена нами в ході експериментального дослідження. Ми вважаємо, що для успішної роботи груп на уроці необхідна велика кількість різноманітних завдань, які відрізняються від звичайних диференційованих завдань і своїм змістом, і, головне, операційною діяльністю.

§6. Розвиток комунікативного аспекту творчості при груповій навчальній діяльності молодших підлітків як одна з умов підвищення їх пізнавальної активності

Проблема творчої діяльності учнів при груповій організації навчання не знайшла свого глибокого дослідження в педагогіці. Та й сама проблема творчості продовжує залишатися однією з ділянок "педагогічної цілини". "Творчість не є додатковий, особливий момент діяльності, поряд з її операційно-технологічними сторонами,- пише В.В.Давидов,- а цілісна діяльність, якій підпорядковані всі сторони, форми і види діяльності. Тому оволодіння ними відбувається в процесі конкретного творчого акту, а не до чи повз нього. Саме знання не є кінцева мета, а є особливий момент громадської активності учнів, яка дає можливість вийти за межі того, що пізнане" [10, с.129]. Ця глибока думка видатного вченого-психолога знайшла своє практичне втілення в нашому експерименті: було розроблено певну методику формування творчих діяльнісних здібностей учнів при груповій формі роботи на уроці, тобто створено так звані "творчі ситуації", мета яких полягає в тому, що група займається культуротворчою діяльністю.

В основу розробленої методики "творчих ситуацій" лягли деякі положення нової концепції освіти-культуротворча школа, а саме : розуміння дитини як носія особливого культурного світу, в якому діють свої закони і субординації, своя мова, системи і символи; а також – розвиток

"Я – свідомості" учня в природо-соціо-культурному просторі. Але сам процес культуротворчості, в якому учень бере участь у "творчих ситуаціях" і котрий передбачає за своєю суттю саморозвиток особистості, ми інтерпретуємо по-іншому : як можливість розвитку здатності учнів до саморуху через ініціювання ними цілеспрямованих творчих предметних дій.

Створені нами типи "творчих ситуацій" відповідають трьом основним етапам творчості. Послідовно беручи участь у кожній з них, учень непомітно для себе проходить основні стадії творчого процесу. Так відбувається цілеспрямоване формування певних якостей творчої особистості. Враховуючи вікові особливості молодших підлітків, ми розробляли "творчі ситуації" в основному як завдання сприйняття і переробки навчальної інформації в образно-знакових моделях. Педагогічний експеримент показав, наскільки важливо спеціально формувати у школярів прийоми "створення образів предметів і явищ, які вивчаються. Крім того, потрібно, щоб, оволодіваючи узагальненими прийомами навчальної роботи, учні пов'язували їх з образами, в яких втілені дії, що входять до складу прийому, і деякі варіації цих дій" [12,с.81].

Ми вважаємо, що головне в творчості – це усвідомлення дитиною себе як “нового відкриття”, як активного перетворюючого начала, як будівника світу, котрий реалізує в процесі цього будівництва свою особистість. З цієї точки зору, формування смислової установки на творчість і подальший розвиток креативних здібностей учнів у процесі групової діяльності на уроці можуть бути розглянуті як одна з умов підвищення пізнавальної активності молодших підлітків.

Розробляючи понятійну основу моделі “творча ситуація”, обов’язковими складовими її ми обрали **створення оригінального освітнього продукту пізнання в процесі інтенсивної комунікативної діяльності.** І не безпідставно. Ці два моменти – оригінальність і комунікація – стосуються будь-якого виду творчості, а “у своїх найзагальніших та найістотніших рисах творчість слід визначати як виробництво певного оригінального продукту для комунікаційної мети”, - пише В.А.Роменець. І далі: “На перший погляд, оригінальність і комунікація заперечують одна одну. Адже комунікація передбачає якусь спільність у змісті і формі спілкування, інакше вона взагалі не може бути реалізована. Навпаки, оригінальність становить усе те, що істотно відрізняє одну людину від іншої, - неповторні її риси, тобто, саме творчу індивідуальність, і разом з тим, не зважаючи на цю корінну протилежність оригінальності та комунікації, вони виявляються лише двома органічно пов’язаними моментами єдиної творчої діяльності. Поглиблення оригінальності веде до розширення комунікації. Комунікація, що розширюється, означає інтенсифікацію оригінальності. Те, що на перший погляд здається парадоксом, насправді і в своїй глибокій суті показує, що творчість має суспільний характер і є взаємодією індивідуальностей” [20, с.108-109].

Таким чином, визначаючи комунікативний аспект творчості основоположним при груповій навчальній діяльності учнів, ми тим самим розширюємо уявлення про творчу роботу в групі, розглядаючи її як спільну творчість індивідуумів по створенню оригінального освітнього продукту пізнання в процесі інтенсивного спілкування.

Зараз більше 85 % навчальної діяльності в школі здійснюється в репродуктивних, нетворчих формах. У методиці викладання шкільних дисциплін творча діяльність учнів зводиться в основному до вирішення проблемних навчально-виховних задач. У центрі творчого акту виявляються висування наукової гіпотези та її використання в навчальному пізнанні. В результаті виникає деяка дисгармонія в розумінні завдань виховання творчої особистості, бо для складання оповідань, віршів, музики, які одночасно можуть бути й формою навчання, школярам не треба висувати ніяких “наукових ідей”. Ліквідувати протиріччя, яке виникло, можна за умови, якщо поєднати навчальну діяльність з культуротворчістю. Моделювання “творчих ситуацій” на уроці – наша спроба розв’язати цю проблему.

Обґрунтувавши теоретично доцільність участі учнів у “творчих ситуаціях” у процесі групової навчальної діяльності, ми почали реалізовувати задумане на практиці, в ході проведення педагогічного експерименту. Але спочатку необхідно було навчити молодших підлітків уміло переводити в знаки і символи, візуально-наочні образи знання, одержані на уроці. Тому протягом цілого навчального року (5кл.) ми проводили цілеспрямовану роботу по розвитку не тільки семіотичної функції учнів, але й їх образного мислення.

Про роль образного мислення у процесі навчання написано багато. Виховати школяра, не формуючи його образного мислення, неможливо. “Складна мозаїка образів, які беруть участь у засвоєнні знань, показує, наскільки важливим є завдання навчання роботі з образом, ним наша школа систематично та цілеспрямовано, на жаль, не займається” [8, с.26].

Організовуючи таку діяльність учнів, ми розуміли, що перевага в навчанні словесно-образних схем засвоєння знань приводить до недостатнього розвитку уяви, образного мислення школярів і як результат – до зниження інтересу до навчання. Тому свою задачу ми розуміли як створення такої форми засвоєння учнями наукових понять, яка надає їм можливості конструювати свою індивідуальну логіку роботи над змістом поняття.

І ще один важливий момент : метою творчих завдань у цей період було також виховання в учнів “почуття нового” як однієї з головних творчих якостей. Побачити незвичайне в звичайному, по-новому поглянути на звичне, спробувати віднайти образи в оточуючій дійсності, які можна співставити з одержаними значеннями – навчити учня не боятися думати оригінально.

Починається все дуже просто. Вивчивши тему “Натуральні числа” (математика, 5кл.), учні одержують творче завдання розповісти про натуральні числа так, щоб тому, хто про них нічого не знає, стало все зрозуміло і це було б цікаво. Як виконувати це завдання, не пояснюється, але ставиться одна умова – необхідно зробити на аркуші паперу. Результати цієї роботи були настільки несподіваними для нас, що ми навіть не могли уявити, до чого можуть додуматися діти.

Наведемо для прикладу оповідання Ганни Стеценко (5кл.): “В одному маленькому містечку жив був один промінь. Він тягнувся до безмежності, його називали ZУ і йому не вистачало місця для проживання. І раптом він познайомився з прямою, яку називали АВ. І промінь почав жити разом з нею. Вона перетиналася з відрізками RP s PN, і побачили вони трикутники – рівнобедрені і рівнобічні. Вони всі потоваришували і стали жителями математичного містечка. У ньому я побачила натуральні числа. Там було їх дуже багато, але найбільшого натурального числа не було. Вони всі були красиві і не брудні. Число нуль образилося на натуральні числа і сказало :"Подумаєш, без них обійдуся". А натуральні числа сміються і говорять : "Ми натуральні числа і у нас є свій знак, який пишеться так : "$\in N$". "У мене теж є свій знак, - образившись, сказало число нуль. – Він пишеться ось так : "$\notin N$".

$0 \notin N$ – ось так, зрозуміли ?".

При вивченні творчих робіт учнів починаєш розуміти, що образ в їхній діяльності виступає своєрідним променем, який вибірково фіксує своїм змістом ті сторони й якості матеріалу (котрий вивчається), що їх він вважає головними. Можна сказати, що світ образів, створений дитиною у процесі такої діяльності, є результат її індивідуального досвіду сприйняття і перетворення інформації. І, дійсно, якщо порівняти роботи учнів, що мають різний рівень навченості, то стає ясно : створити динамічний образ матеріалу, який вивчається, вдається не всім. Роботи слабких учнів неяскраві, нецікаві, відображають лише деякі моменти вивченого матеріалу. Але під час проведення експерименту ми були свідками того, як багато з них, набувши досвіду такої діяльності, починають успішно справлятися з завданнями такого виду.

Наступний вид творчого завдання мав на меті розвиток "почуття нового". Так, після вивчення законів додавання і віднімання чисел учням пропонувалося проілюструвати дію законів в незвичайній формі, по-новому, не так, як це зроблено в підручнику.

Відповідь на запитання: "Що робить учень, виконуючи таке завдання і розвитку яких якостей особистості сприяє така форма діяльності?" дуже коротка : займається культуро-творчістю. Працюючи над виконанням такого завдання, учень самовиражається в процесі творчості, творить, виявляючи себе, впускаючи в замкнуту систему знань елемент оточуючого світу. Це одна з небагатьох можливостей, яка у процесі напруженого навчання дозволяє учню "вийти за межі пізнаного".

І ось наступив момент спільної творчої діяльності. Починаючи з шостого класу, учні експериментального класу працюють лише групами, творчі завдання виконуються лише разом. Наступає час, коли кінцевий результат створюється зусиллям кількох чоловік. Деякий досвід творчої діяльності у дітей є, тепер необхідно навчитися працювати разом, усією групою.

Форми виконання творчих завдань були різноманітними : від написання сценаріїв для мультфільмів із вивченої теми до створення міні-підручника. Особливо сподобалися учням "завдання з секретом". Це завдання, яке вони придумують для іншої групи, і, виконуючи його, група повинна одержати несподіваний результат.

Узагальнення результатів дослідження дає право стверджувати, що участь молодших підлітків у “творчих ситуаціях” сприяє розвитку їх креативних здібностей, якщо є першочергова установка на створення креативного продукту. Креативність у розумінні психологів – це “неординарність, здатність виходити за рамки стереотипних асоціацій, оригінальність”. Отже можна впевнено констатувати, що такий вид групової діяльності формує креативну особистість.

Шкільний підручник складається здебільшого з завдань, які регламентують порядок дій по їх виконанню, і порушення послідовності в цьому випадку не допускається. Учень не має можливості виявити оригінальність свого мислення, свою власну манеру оформлення рішення завдання, бо його дії заздалегідь сплановані у самому навчальному завданні. Тому шкільне життя потребує таких завдань, результатом яких є створення продуктів креативності.

Участь школярів у “творчих ситуаціях” протягом шостого класу була ретельно спланована, але мала маленький недолік – була епізодичною. Виникла потреба у розробці такої форми творчої діяльності групи на уроці, яка б продовжувалася без перерви тривалий час. Вихід було знайдено: була створена дидактична гра “Науково-дослідницький центр шкільних проблем математики”. Метою такої роботи в експериментальному класі було формування творчого мислення в умовах дидактично організованого спілкування і ситуаціях групового мислення.

Структура самої гри (ігрові завдання, правила ігрових дій, пізнавальний зміст гри, її результат) були ретельно продумані. Так, усі учні класу – співробітники НДЦ, а вчитель – його керівник. Ігровий момент дозволяє поділ на групи всього класу організувати як роботу таких лабораторій : лабораторія розробки наукових ідей (учні груп НВ і В), лабораторія теоретичної обробки ідей (учні груп $В_2$ і С), лабораторія практичного застосування одержаних знань (учні груп $С_3$ і Н). Ігровий задум цієї гри втілений уже в самій назві і дозволяє внутрігрупову й міжгрупову діяльність учнів організувати відповідно до правил ігрових ідей як групову діяльність.

Математична сторона змісту гри чітко визначена, і тому результат роботи учнів легко прогнозований і реальний для досягнення. Фактично створено модель взаємодії учасників гри, яка за своєю суттю відтворює справжню наукову діяльність співробітників дослідницького центру.

Важливо, що такій ігровій діяльності властива відповідна трикомпонентність, якою характеризуються будь-які міжособистісні стосунки в групі. Тобто учасників спільної ігрової діяльності зв’язують пізнавальний (інформаційний), афективний (емоційно-комунікативний), практичний (поведінковий, регулятивний) компоненти. Наявність усіх трьох компонентів міжособистісних стосунків у спільній ігровій діяльності дозволила організувати дидактичну гру не як епізодичний вид діяльності, а як тривалу ігрову взаємодію учнів, що в свою чергу дало позитивні результати: зросли не тільки інтерес до навчання й пізнавальна активність учнів, але й відбулися суттєві зміни в самому характері розумової діяльності учнів.

Граючи роль співробітника НДЦ, учень не просто думає, а вчиться думати красиво. З часом це навіть починає подобатися йому. Розумова діяльність учня на уроці стає більш емоційно-збагаченою і продуктивно насиченою. Ми помітили, що в експериментальному класі порівняно з контрольним відбулися глибокі зміни в сфері розумової діяльності школярів : мислення стало більш чітким, значно поліпшилася здатність висловлювати думки ; таке співробітництво стимулювало аналітичну й синтетичну діяльність мислення ; робота в групі сприяла підвищенню критичності й логічності мислення, оскільки обстановка групової діяльності створює умови для постановки гіпотез і перевірки їх справжності.

У багатьох дослідженнях, присвячених груповій організації навчання, вказується на те, що одиницею навчального процесу в даному випадку є не урок, а ціла навчальна тема. І, дійсно, моделюючи навчання учнів у складі малих груп як тривалу дидактичну гру, ми зіткнулися з необхідністю планувати навчальний матеріал не на один урок, а на цілу тему. Це, в свою чергу, зумовило по-іншому підійти до розгляду структури уроку та його типів. Ми розуміли, що це повинні бути уроки моноструктурні за своїм характером. Тому під час проведення експерименту нами були розроблені і практично перевірені уроки так званого когнітивного і креативного типів. Це уроки образного і символічного бачення, уроки конструювання понять, правил, теорем. Кожен із перелічених типів уроків має недосліджені можливості для реалізації групового способу навчання. Але для того, щоб ці уроки знайшли своє місце в шкільній практиці, необхідні істотні зміни в критеріях оцінки всієї діяльності учнів. На нашу думку, 12 - бальна оцінка знань учнів дозволяє частково вирішити цю проблему.

Традиційно у школі освітній продукт учня оцінюється за ступенем його наближення до заданого, тобто, чим повніше й точніше відтворює учень заданий текст, тим вища оцінка його роботи. Результатом уроку креативного типу є створення оригінального освітнього продукту, тому й оцінювання тут інше: чим більше оригінальності, тим вища його оцінка.

Уроки когнітивного типу ми використовували на уроках фізики і математики. Пояснюється це тим, що теоретичний матеріал названих шкільних предметів дозволяє організувати групову роботу молодших підлітків по створенню нових понять цілком самостійно або з використанням уже відомих понять.

Моделюючи групову пізнавальну діяльність учнів на уроках такого типу, можна зрозуміти, що відбуваються істотні зміни в “смисловому полі” самого поняття “групова навчальна діяльність” учнів – головним у визначенні суті цього поняття стає не виконання спільними зусиллями завдання чи спілкування в групі (це, безумовно, важливо і має місце), а те, як і наскільки в процесі спільної діяльності у групі може бути задоволена потреба індивіда здійснитися як особистість, тобто ступінь персоналізації.

Таким чином, педагогічний експеримент підтвердив наші висновки стосовно того, що:

- групова навчальна діяльність з установкою на творчість активізує роль самої взаємодії у процесі когнітивних трансформацій, усуваючи пасивну позицію будь-кого з учасників ситуації навчання, створюючи навколо нього так зване “поле мислення, яке рефлексує” і перебуваючи в якому, учень має змогу конструювати власний процес пізнання.
- вплив “творчих ситуацій” на “емоціогенність” усіх компонентів діяльності у складі малої групи, висока міра емоційної насиченості самої пізнавальної діяльності у групі роблять її привабливою для молодшого підлітка, як наслідок з цього – значно зростає її пізнавальна активність.
- інтенсивна цілеспрямована комунікативна діяльність членів групи за участі у “творчих ситуаціях” створює “групове поле інтересів”, в якому переплітаються особистісні інтереси кожного, утворюючи вектор загальної групової зацікавленості, спрямований на створення творчого освітнього продукту пізнання.
- участь у “творчих ситуаціях” можна розглядати як умову розвитку здібності молодшого підлітка до саморуху через ініціювання ними цілеспрямованих творчих предметних дій.

Урок - гра : “ Робота НДЦ шкільних проблем математики ”
Тема уроку : *“ Добуток многочленів ”*

Добрий день, діти ! Я думаю, що ви не забули про роботу Науково-дослідницького центру (НДЦ) шкільних проблем математики на базі нашого класу. Тому сьогодні пропоную провести не просто урок, а продовжити роботу нашого НДЦ. Отже, І ряд – це лабораторія ПЗОІ – практичного застосування одержаних ідей (керівник Голубенко О.); ІІ ряд – лабораторія ТОІ – теоретичної обробки ідей (керівник Дубовик Я.); ІІІ ряд – лабораторія РНІ – розробки наукових ідей (керівник Дзюба Т.).

Увага! Центру підготуватися до роботи! (Учитель виступає в ролі директора НДЦ).

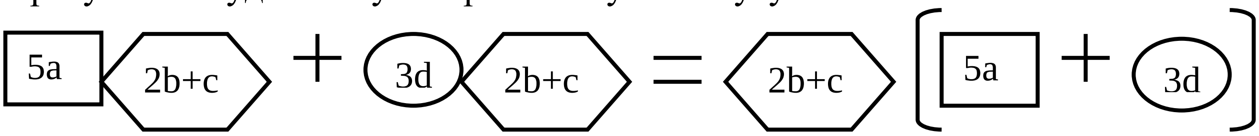
Шановні співробітники НДЦ! Основна проблема, над якою останнім часом працює наш центр, - многочлен. Робота проводилася в трьох напрямках (на дошці висить плакат (рис. 1)).

I – сума і різниця многочленів. Працюючи в цьому напрямку, лабораторії одержали конкретні результати: знайдено алгоритм приведення многочлена до стандартного вигляду й алгоритм додавання і віднімання многочленів. У нашому науковому журналі з’явилися статті, які переконливо доводять, що таке математичне поняття, як “многочлен”, має просте практичне пояснення (див. ст. “Звідки беруться многочлени”).

II – це добуток одночлена та многочлена і тут досягнуто хороших результатів. Лабораторія ідей запропонувала форму такого вигляду :

$$(O + \Delta)\cdot \square = O\cdot \square + \Delta \cdot \square,$$

а лабораторія ТОІ обґрунтувала алгоритм виконання дії множення многочлена й одночлена; лабораторія ПЗОІ довела життєву справедливість цієї формули, вмістивши у журналі статтю. Результатів досягнуто і в розробці теми: “Винесення спільного множника за дужки”. Одержано формулу, за своїм виглядом схожу на попередню, але з поясненням зрозумілим будь-якому співробітнику інституту:



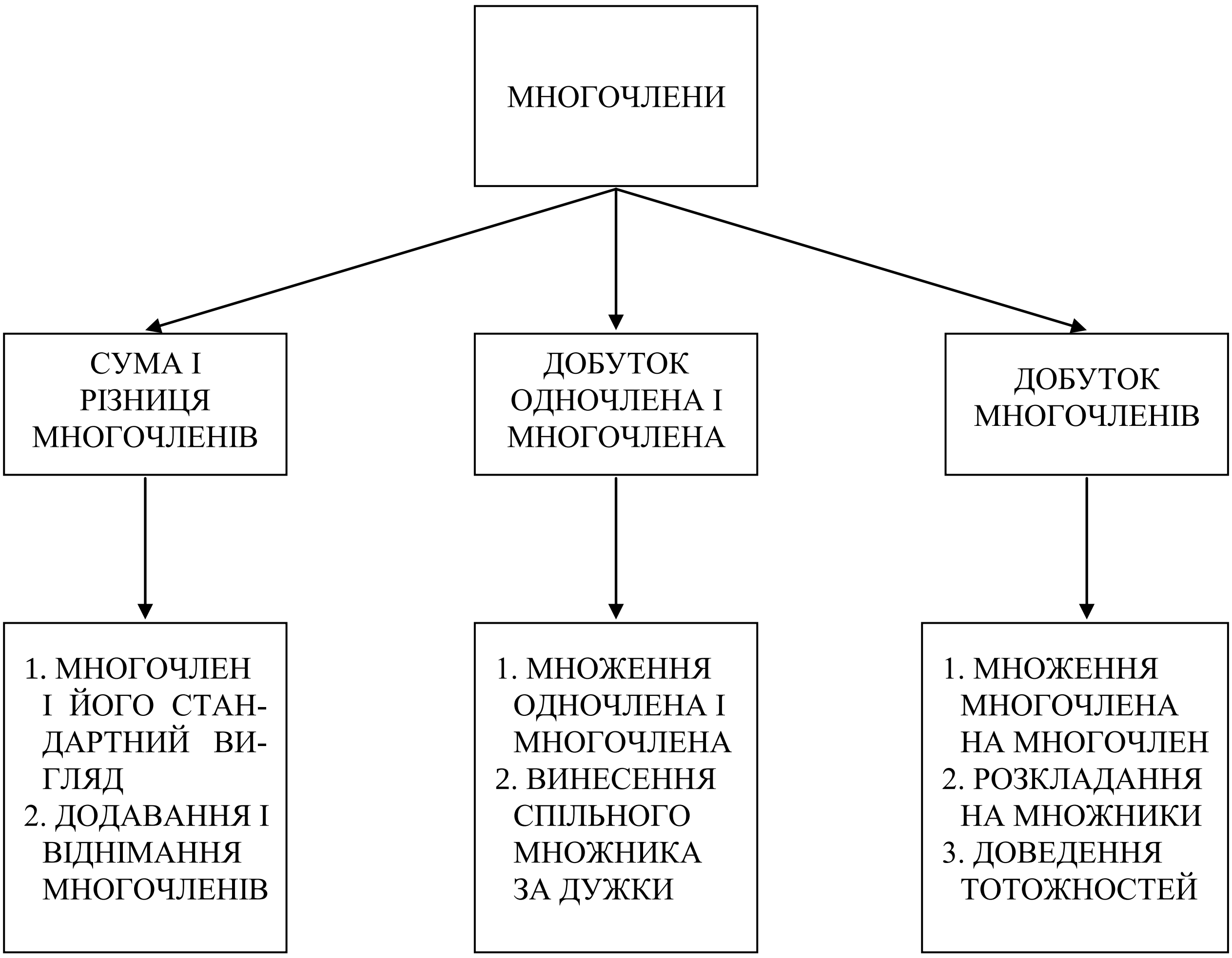


Рис.1.

А зараз почнемо роботу над третьою проблемою – добуток многочленів. Усьому центру було запропоновано розв'язання такої задачі :

[□ + ○][◇ + ⬠] = ?

Як і у більшості випадків, ідея розв'язання народилася у лабораторії РНІ. Слово – керівнику Дзюбі Тетяні.

Співробітники нашої лабораторії запропонували багато варіантів розв'язання, але, як показали подальші дослідження, правильним результат одержала Добровольська Тетяна. Їй слово.

Добровольська Т. (працює з графопроектором). Пам'ятаєте формулу

[□ + ○] △ = □ △ + ○ △ ?

Я вирішила використати її у нашому випадку, розмірковуючи так :

нехай [◇ + ⬠] – це △. У результаті отримала:

[□ + ○][◇ + ⬠] =

= □[◇ + ⬠] + ○[◇ + ⬠] =

= □◇ + □⬠ + ○◇ + ○⬠

Наша лабораторія гордиться, що правильний результат було одержано у нас і нашу ідею ми передаємо лабораторії ТОІ Дубовик Я. (керівник лабораторії ТОІ).

– Ми в своїй роботі у лабораторії ТОІ пішли далі й отримали алгоритм множення многочленів (далі пояснює одержану формулу).

Отже, щоб помножити многочлен на многочлен, треба помножити кожен член одного многочлена на кожний член іншого многочлена, а одержані добутки скласти. Якщо у когось виникає сумнів у справжньості одержаного результату, нехай читає статтю в нашому науковому журналі, а також плакат – пояснення.

Учитель: – Добре, я як керівник центру повністю згодна з одержаною формулою і пропоную застосувати її в роботі. Розв'язуємо такі завдання:

І РЯД	**ІІ РЯД**	**ІІІ РЯД**
№ 411*	№ 414	№ 419 (г, д, е)
№ 413	№ 415 (б, г, е)	№ 421
№ 415 (а, в, д)	№ 419 (а, б, в)	№ 422

І РЯД	**ІІ РЯД**
Довести рівність	Довести тотожність
$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$	$a^m+b^m+5a^{2m}+5a^mb^m=(a^m+b^m)\cdot(1+5a^{m)}$
Записати відповідь:	Записати відповідь:
$(a^n+1)(a^n-1)=\ldots;$	$(a^n+b^n)(a^n-b^n)=\ldots$

Для **ІІІ ряду** завдання на графопроекторі: використовуючи одержані відповіді, відразу напишіть розв'язання.

$x^{2n}-(x^n+1)(x^n-1)=\ldots;$ $y^{2n}-(y^n+x^n)(y^n-x^n)-x^{2n}=\ldots$

Продовжити запис за зразком:

$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2$

$(x^n+y^n)^2=$

$(a^n+b^n)^2=$

$(x^n+y^m)^2=$

Для контролю за засвоєнням пропоную розв'язати таке завдання :

І РЯД $(a+x)(\ldots+в)=ay+\ldots+x\ldots+xв$

ІІ РЯД $(\ldots+y)(x+\ldots)=2x^3+\ldots+xy+ay$

ІІІ РЯД $(\ldots+\ldots)(x^2+\ldots)=x^{n+2}+y^3+\ldots+\ldots$

Домашнє завдання – диференційоване

Теорія: §4, п.4, с.73-74, практика:

І РЯД	ІІ РЯД	ІІІ РЯД
№ 412	№ 416	№ 420 (г, д, е)
№ 414	№ 420 (а, б, в)	№ 423

* Номера завдань вказані за підручником Кравчук В., Янченко Г. Алгебра: Підручник для 7 класу / За ред. Слєпкань З.І. Вид. 2-ге, переробл. та доповн. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 192 с.

Література до розділу

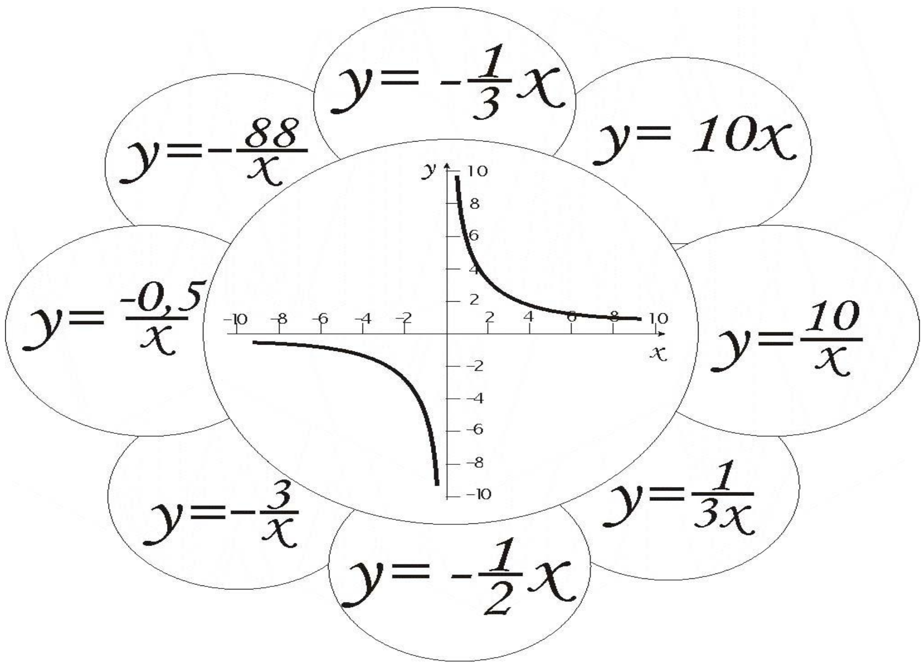
1. Асмолов А.Г. XX век: психология в век психологии // Вопросы психологии. – 1999. – №1. – С.3-12.
2. Асмолов А.Г. и др. Личность как предмет психологических исследований. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 360 с.
3. Бех І. Д. Особистісно зорієнтоване виховання : науково-метод. посіб. / І.Д. Бех; Ін-т змісту і методів навчання. – К.: ІЗМН, 1998. - 204 с.
4. Бондар О.М. Значення наочності у розвитку пізнавальної активності учнів // Математика в школі. – 2001. – №2. – С. 43-44.
5. Брушлинский А.В. Мышление: процесс, деятельность, общение. – М.: Наука, 1982. – 387 с.
6. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. / [О.В. Скрипченко, Л.В. Волинська, З.В. Огороднійчук та ін.]. - К.: Каравела. 2007. - 400 с.
7. Власова О. І. Педагогічна психологія : навч. посіб. / О. І. Власова. - К. Либідь, 2005. —400 с.
8. Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления учащихся / Под ред. И.С. Якиманской. – М.: Педагогика, 1989. – 221 с.
9. Волков И.П. Цель одна – дорог много: Проектирование процессов обучения: Книга для учителя: Из опыта работы. – М.: Просвещение, 1990. – 159 с.
10. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М.: Интор, 1996. – 544 с.
11. Занков Л.В. Обучение и развитие. – М.: Просвещение, 1975. – 357 с.
12. Кабанова-Меллер Е.Н. Учебная деятельность и развивающее обучение. – М.: Знание, 1981. – 96 с.
13. Калмыкова З.И. Психологические принципы развивающего обучения. – М.: Знание, 1979. – 179 с.
14. Лозова В.І. Пізнавальна активність школярів: спецкурс із дидактики. – Х.: Основа, 1990. – 89 с.
15. Мар'яненко Л.В. Особливості структурної організації пізнавальної активності учнів // Педагогіка і психологія. – 1997. - №1. – С. 14-23.
16. Оконь В. Основы проблемного обучения: Пер. с польск. – М.: Просвещение, 1968. – 208 с.
17. Подмазін С.І. Особистісно-орієнтований освітній процес. Принципи. Технології // Педагогіка і психологія. – 1997. – №2. – С.37-43.

18. Психология развивающейся личности / Под ред. А.В. Петровского. – М.: Педагогика, 1987. – 238 с.
19. Ретунська В.В. Розвиток семіотичної функції учнів як одна з умов підвищення ефективності групової навчальної діяльності учнів на уроках математики // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Вип. 17. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2002. – С.118-129.
20. Роменець В.А. Психологія творчості. – К.: Вища школа, 1971. – 244 с.
21. Салмина Н.Г. Виды и функции материализации в обучении. – М.: Изд-во МГУ,1981. – 134 с.
22. Салмина Н.Г. Знак и символ в обучении. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 286 с.
23. Смирнов С.Д. Педагогика и психология высшего образования: от деятельности к личности / С. Д. Смирнов. - М. : Аспект-Пресс, 1995. - 270 с.
24. Смирнов С.Д. Психология образа: проблемы активности психического отражения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985. – 231 с.
25. Хэссард Дж. Создание среды кооперативного обучения: Исследования. – США, Штат Джоржио, 1987.
26. Шамова Т.И. Активизация учения школьников. – М.: Просвещение, 1982. – 209 с.
27. Щукина Г.И. Активизация учебно-познавательной деятельности учащихся в учебном процессе. – М.: Просвещение, 1979. – 160 с.
28. Якиманская И.С. Развивающее обучение. – М.: Педагогика, 1979. – 144 с.
29. Ярошенко О.Г. Педагогічні основи групової навчальної діяльності школярів // Автореф. дис. … докт. пед. наук: 13.00.01, 13.00.02. – К., 1998. – 33 с.
30. Ярошенко О.Г. Проблеми групової навчальної діяльності школярів: дидактико-методичний аспект. – К.: Станіца, 1999. – 245 с.

Людмила Лутченко, Ренат Ріжняк

Розділ ІІ.

Організація самостійної роботи учнів 7-9 класів у процесі навчання математики



§1. Самостійна робота учнів і її роль у залученні школярів до активної навчально–пізнавальної діяльності

Проблема самостійної роботи у навчальному процесі досліджувалась багатьма вченими, такими як Б.П.Єсипов, І.Я.Лернер, П.І.Підкасистий, А.С.Линда, І.Т.Огородников, Н.О.Половникова, М.М.Скаткін, А.В.Усова, І.Е.Унт, Л.В.Жарова та інші.

У їхніх роботах знаходимо різноманітні підходи до визначення поняття “самостійна робота”, розкриттю її суті, класифікації видів, значення в навчальному процесі. Це пояснюється багатогранністю даної проблеми, а звідси і відсутністю єдиної точки зору на її розв’язання.

Багато дослідників основною ознакою самостійної роботи учнів вважають рівень їх самостійності в оволодінні знаннями, навичками й уміннями. Самостійна робота розглядається при цьому як засіб формування самостійності учнів, як форма організації навчально-пізнавальної діяльності, що вимагає активності й самостійності мислення, творчості та ініціативи (Р.Г.Лемберг, Т.І.Шамова та ін.)

Б.П.Єсипов вважає, що самостійна робота учнів виконується без безпосередньої участі вчителя, але за його завданням у спеціально визначений для цього час. При цьому учні свідомо прагнуть досягти поставленої в завданні мети, застосовуючи свої зусилля і виражаючи в тій чи іншій формі результат розумових або фізичних дій [13,с.34]. Новизна досліджень Б.П.Єсипова полягає в тому, що він науково обґрунтував провідну роль самостійної роботи учнів на уроці, акцентував увагу на тому, що рівень самостійності школярів при виконанні різних видів самостійних робіт пов’язаний з характером їх діяльності, яка починається з наслідувальних дій, потім ускладнюється, наближаючись до своїх найвищих проявів.

Б.П.Єсипов показав, що самостійна навчальна робота учнів має велике значення для свідомого і міцного засвоєння знань, вироблення практичних навичок та умінь, розвитку творчих здібностей та ініціативи, виховання самостійності як риси особистості.

Самостійну роботу учнів О.А.Нільсон визначає як “вид навчальної діяльності, під час якого учні під керівництвом учителя виконують індивідуальні, групові або фронтальні завдання, прикладаючи необхідні для цього розумові й (або) фізичні зусилля” [32,с.76].

А.В.Усова розглядає самостійну роботу учнів як метод навчання, за допомогою якого учні оволодівають знаннями, набувають навичок й умінь, а також досягається розв’язання виховних завдань. Вносячи істотні доповнення в означення самостійної роботи, автор підкреслює важливість активних розумових дій учнів, пов’язаних з пошуком найбільш раціональних способів виконання запропонованих учителем завдань, з аналізом результатів роботи [55,с.5].

В.К.Буряк підкреслює, що самостійна робота учнів являє собою таку форму навчального процесу, у ході якого, читаючи та вивчаючи літературу, учні здійснюють активну розумову діяльність з опануванням змісту того чи іншого наукового предмету як за завданнями навчальних закладів, так і за власною ініціативою, без сторонньої допомоги [6,с.14].

Розглядаючи самостійну роботу як форму організації самостійної діяльності учнів, Т.І.Шамова виділяє організаційну (зовнішню) та змістово-логічну (внутрішню) сторони цього поняття. До першого аспекту відноситься мета самостійної роботи, конкретне завдання, чітке визначення форми відображення результату, форми перевірки виконання роботи кожним учнем; до другого висунені такі вимоги: відповідність дидактичним цілям навчання та виконання забезпечення навчально-пізнавальної діяльності на всіх рівнях пізнавальної самостійності; використання варіативних завдань, які забезпечують максимально успішне протікання самостійної роботи кожного учня [73,с.87-89].

Т.І.Шамова вважає самостійну роботу й проблемне навчання найважливішими засобами активізації учіння, у процесі якого формується пізнавальна самостійність школярів. Вона розглядає пізнавальну самостійність як рису особистості, що характеризується її прагненням та умінням без сторонньої допомоги оволодівати знаннями і способами діяльності, розв'язувати пізнавальні задачі з метою подальшого перетворення й удосконалення навколишньої дійсності. Дослідниця виділяє такі компоненти пізнавальної самостійності як мотиваційний, змістово-операційний та вольові зусилля [73,с.69].

Основну функцію самостійної роботи Т.І.Шамова вбачає у забезпеченні активної навчально-пізнавальної діяльності учнів щодо оволодіння знаннями й способами діяльності, формування світогляду, розвитку інтелектуальних і моральних сил учнів.

До завдань, що виконували функції самостійних робіт, вона ставить такі вимоги:

– зміст завдань повинен строго відповідати конкретним дидактичним цілям навчання й виховання;
– зміст і методичний апарат (методичні вказівки, інструкції тощо) завдань повинні забезпечувати пізнавальну діяльність на всіх рівнях пізнавальної самостійності;
– у завданнях повинні використовуватися всі можливості для варіативності, яка максимально забезпечить успішне виконання самостійної роботи кожним учнем [73,с.85-86].

Автор вказувала на важливість формування в учнів уміння планувати свою роботу та навичок самоконтролю, який ґрунтується на умінні співвіднести отриманий результат з поставленою метою. На її думку, формуванню навичок самоконтролю сприяють завдання, пов'язані з обґрунтуванням відповіді, доведенням; завдання на порівняння (зіставлення, протиставлення) [73].

Особливо ґрунтовно досліджував самоконтроль як важливий компонент самостійної діяльності А.С.Линда. Він підкреслював, що необхідно навчати учнів конкретних прийомів самоконтролю, одночасно формуючи його як загальне навчальне уміння, досліджував його особливості при вивченні окремих предметів. Учений визначив роль самоконтролю в розвитку самостійної навчальної роботи і, як наслідок, вважав однією з основних ознак самостійної роботи "систематичне здійснення учнями самоконтролю за ходом і результатами своєї роботи, корегування та удосконалення способів її виконання" [29,с.16].

Жарова Л.В. вважає самостійну навчальну роботу таким методом навчання, при якому учні за завданням учителя і під його керівництвом самостійно розв'язують пізнавальну задачу, докладаючи зусилля й активність [18,с.17]. З цієї позиції вона підходила до розуміння суті самостійної діяльності учнів у навчанні як діяльності, що неперервно розвивається і впливає на особистість школяра.

Автор вважає, що самостійну діяльність стимулюють завдання учителя, які передують викладу матеріалу, проблемні ситуації, які створюються педагогом, контрольні питання й завдання, що вимагають негайного відтворення почутого, та інші прийоми [18,с.19].

Ми теж вважаємо самостійну роботу методом навчання, розглядаючи метод як багатовимірне, багатоякісне явище, яке має різноманітні сторони прояву. Під методом навчання ми будемо розуміти упорядковану сукупність методичних прийомів, практичних дій і розумових операцій, за допомогою яких організується пізнавальна й практична діяльність учнів та забезпечується засвоєння ними локальної частини навчального матеріалу, побудованого навколо конкретної навчальної задачі, яка виступає частиною загальної мети навчально-пізнавальної діяльності.

В організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності важливе місце належить мотивації учіння – внутрішнім стимулам, які пов'язані з відношенням школяра до самої діяльності і її співучасників. Г.І.Щукіна переконливо довела, що інтерес виступає потужним стимулом активності особистості, під впливом якого всі психічні процеси протікають особливо інтенсивно й напружено, а діяльність стає захоплюючою і продуктивною.

У діяльності створюються різноманітні міжособистісні, міжсуб'єктні стосунки, що забезпечують "сприятливий клімат навчання, спілкування (співробітництво, співдружність, взаємодопомога, взаємозбагачення)" [62,с.46]. Саме мотивація та привнесення суб'єкт-суб'єктних відносин у навчальний процес і сприяють "самоналагодженню й самоорганізації діяльності, без чого не можна чекати ефекту та перетворюючої її сили" [62,с.30].

М.Я.Ігнатенко вбачає засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів у прикладній спрямованості шкільного курсу математики. Він велику увагу приділяє навчанню учнів моделюванню: "…у системі задач необхідно виділити задачі-моделі, на прикладах яких учитель зможе організувати діяльність учнів на самостійний або колективний пошук алгоритму розв'язання та його формування". Алгоритмізація навчання у поєднанні з проблемним підходом, на його думку, допомагає полегшити й прискорити вивчення програмного матеріалу і тим самим звільняє розумову енергію учнів для розвитку інтуїції, творчої діяльності відносно розв'язування нестандартних задач [23,с.41].

П.І.Підкасистий визначив самостійну роботу як дидактичний засіб навчання, за допомогою якого вчитель організовує діяльність учня як на уроці, так і при виконанні ним домашнього завдання. Під час цього учень "залучається до різнорівневих процесів навчального пізнання, які охоплюють увесь спектр відтворюючих і творчих дій". Самостійна діяльність розглядається ним як цілеспрямований процес, який організовується й проходить у структурі навчання для розв'язання конкретних навчально-пізнавальних задач [41,с.45].

Автор підкреслює, що зовні самостійна робота як засіб навчання виступає у вигляді найрізноманітніших завдань, внутрішньо вона виявляється через пізнавальну чи практичну задачу, яка у навчанні служить своєрідним імпульсом для включення учня в процес навчально-пізнавальної діяльності [там же]. Кожна самостійна робота повинна відповідати меті та завданням матеріалу, що вивчається, передбачати поетапне просування від незнання до знання.

Такий підхід до визначення суті самостійної роботи зобов'язує вчителя проводити її на уроках у певній системі, постійно ускладнюючи завдання, послідовно й планомірно навчаючи учнів необхідних прийомів самостійної навчальної діяльності з урахуванням їх підготовленості та пізнавальних можливостей.

П.І.Підкасистий відзначив, що у всіх видах діяльності учнів проявляються два взаємопов'язаних між собою процеси: відтворюючий і творчий. Процеси відтворення виявляються в кількісному накопиченні, привласненні готових знань і способів дій. Вони допомагають учням оволодівати необхідними знаннями про предмети та явища об'єктивного світу, усвідомити й засвоїти способи дій і тому необхідні для залучення учня до творчості. Творчі процеси виражаються перш за все у накопиченні особистого практичного пізнавального досвіду, в новизні продукту діяльності, у створенні нових способів розв'язання проблем, нових комбінацій, у перенесенні прийомів. У пізнавальній діяльності школяра відтворюючі процеси, що протікають у формі наслідування, виступають в єдності з елементами творчих процесів. Під час пояснення вчителя, читання тексту, розв'язування задач учень висловлює свої думки, порівнює, співставляє розв'язання, свій особистий пізнавальний досвід з новими знаннями і суспільним досвідом, способами розв'язання нових проблем [42,с.75-78].

Аналізуючи значення самостійної роботи, П.І.Підкасистий відзначає, що поступове й постійне залучення учнів до самостійної роботи із збільшенням складності сприяє тому, що вони виявляють зацікавленість до самого процесу діяльності; пізнавальний досвід, яким вони опановують, набуває діючого та гнучкого характеру, тому і активність та самостійність учнів у процесі навчання зростає [44]. Учень одержує задоволення від самого процесу пізнання, а це спонукає його у процесі оволодіння знаннями та засобами діяльності до активізації роботи.

Цінним у цій концепції є те, що її прихильники намагаються прикути увагу педагогів до завдань, які потребують самостійного мислення, евристичних прийомів діяльності.

До основних евристичних прийомів відносять застосування загальних розумових дій абстрагування, порівняння, аналогію, узагальнення і систематизацію. Вони стимулюють пошук розв'язків нових проблем, спрямовують думку на опанування сутності змісту, залучають наочно-образне мислення до процесу міркування, що полегшує сприймання ситуації, описаної в умові задачі. Спеціальні дослідження психологів, дидактів, методистів і шкільна практика показали, що евристичні прийоми при розв'язуванні задач використовують лише найбільш розвинені учні [11, 38, 50].

Великий внесок у розробку нових шляхів активізації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів і можливостей управління нею внесли вчені України. Зокрема, вони розглядали психолого-педагогічні основи навчання школярів таких прийомів розумової діяльності, як підведення під поняття, виділення головного, конструювання означень, доведення, індукція й дедукція, встановлення причинно-наслідкових зв'язків тощо, та формування загальних розумових дій: порівняння, аналіз, синтез, абстрагування, узагальнення і конкретизація, аналогія, (Слєпкань З.І., Швець В.О., Осинська В.М., Бевз Г.П. та ін.).

Як вітчизняні, так і зарубіжні вчені досліджували шляхи формування спеціальних прийомів роботи з книгою та свідомого розуміння тексту:

(Осинська В.М., Грудьонов Я.І. та ін.). Проблеми використання нових інформаційних технологій у навчальному процесі успішно розробляються М.І.Жалдаком та його учнями [9, 10, 14, 15, 16, 17, 28].

Таким чином, проблема самостійної роботи учнів розв’язувалася й розв’язується багатогранно в різних аспектах, і слід було б чекати єдності хоча б основних принципових позицій дидактів та методистів. Однак думки розійшлись і у визначенні поняття самостійної роботи, і у трактуванні специфічних ознак самостійної роботи, і в з’ясуванні її впливу на пізнавальні процеси учнів, і у визначенні її навчально-виховних результатів. Кожен автор розглядає ці питання специфічно. Це, безперечно, зумовлено також і складністю та багатогранністю проблеми, її діалектичним характером. Одні автори намагалися розкрити особливості самостійної роботи учнів переважно із зовнішньої сторони, інші ж, навпаки, намагалися визначити її внутрішню сутність, тобто специфіку пізнавальної діяльності школяра при виконанні ним самостійної роботи. Односторонній підхід не міг забезпечити об’єктивного трактування проблеми самостійної роботи учнів й привести методистів і дидактів до єдиної точки зору хоча б з основних питань.

Ми вважаємо, що розкриття характерних ознак самостійної роботи можливе лише при аналізі її зовнішньої та внутрішньої сторін у діалектичній єдності. Тому самостійну роботу треба розглядати як метод навчання – багатовимірне, багатоякісне явище, яке має зовнішню форму прояву й внутрішню сутність, поєднання і склад яких залежить від джерела інформації, логіки пізнання, рівня готовності учнів до самостійної навчальної діяльності та функцій процесу навчання.

Самостійна робота в кожній конкретній ситуації засвоєння знань повинна відповідати конкретній дидактичній меті та завданням. Вона психологічно налаштовує учня на самостійне систематичне поповнення своїх знань і вироблення вміння орієнтуватися у потоці наукової інформації під час вирішення нових пізнавальних завдань.

Збагачуючи дидактичні ідеї, накопичені раніше, можна відмітити, що самостійні роботи:

- сприяють формуванню світогляду школярів;
- забезпечують міцне засвоєння набутих знань;
- озброюють учнів практичними навичками;
- навчають творчо застосовувати свої знання;
- є ведучим фактором активної розумової діяльності.

§2.Класифікація видів самостійних робіт у контексті дидактичних досліджень

Працюючи над проблемою самостійної роботи, вчені намагалися класифікувати її види. Розглянемо деякі із запропонованих класифікацій.

В.П.Стрезікозін, виходячи із джерел одержання інформації, виділяє наступні види самостійної роботи: робота з підручником та навчальною літературою; робота з довідковою літературою; розв'язання та складання задач; навчальні вправи в звичайних зошитах та з друкованою основою; твори й опис; спостереження і лабораторні роботи; роботи-завдання, пов'язані з виконанням ілюстрацій, схем, карт, графіків, роздавального матеріалу, графічні роботи [52]. Автор виділяє самостійні роботи з використанням наочних посібників у окремий вид, хоча з класифікації не випливає, що при виконанні інших видів самостійних робіт їх використання не передбачене.

В.О.Онищук вносить у класифікацію В.П.Стрезікозіна конкретність з урахуванням пізнавальної діяльності учнів. Вчений ділить вправи на чотири групи: попередні завдання або вступні (логічні, пробні); тренувальні вправи (за інструкціями, завданнями); супроводжуючі, заключні (творчі, проблемні завдання, контрольні роботи) [36,с.59].

У основі класифікації Б.П.Єсипова лежить дидактична мета. Автор виділяє чотири типи самостійної роботи: 1) з метою одержання нових знань; 2) з метою формування навичок й умінь; 3) з метою застосування одержаних знань; 4) для організації повторення й перевірки знань, навичок та умінь.

Кожний тип поділений на види.

І тип має такі види: робота учнів у зв'язку з повідомленням учителя (попереднє читання, спостереження, виконання практичних завдань); робота учнів після пояснення вчителя (вивчення матеріалу підручника, спостереження та досліди за інструктивними картками, виконання вправ); самостійне набуття знань (читання, досліди, спостереження).

До ІІ типу самостійної роботи відносяться розв'язання й складання задач, вправ тощо.

ІІІ тип включає в себе такі види: підбір і складання прикладів, які ілюструють суть засвоєних узагальнень; виконання трудових завдань, підготовка творів, повідомлень, доповідей тощо.

IV тип: застосування одержаних знань при виконанні завдань; письмова й практична перевірка; робота з метою зменшення помилок; повторення з метою узагальнення та систематизації знань [13].

Особливо важливим у цій класифікації є те, що автор підкреслює необхідність завдань, які залучають учнів до самостійної навчально-пізнавальної діяльності. Це актуально і в наш час. В умовах безперервного збільшення обсягу наукової інформації особливого значення набувають види робіт, пов'язані з самостійним пізнанням у навчальному процесі школи і поза ним. Не випадково вчителі все частіше пропонують випереджаючі завдання, які передують вивченню нового матеріалу, а також організовують самостійний розгляд деяких питань на уроках.

М.Р.Леонтьєва поділяє самостійні роботи на навчаючі й контролюючі, вважаючи, що при виконанні першої групи завдань діяльність учнів протікає у формі простого відтворення матеріалу, що вивчається. Перевірку таких робіт на уроці дослідниця вважає обов'язковою, так як в результаті неї вчитель має можливість своєчасно визначити ступінь розуміння учнями нового матеріалу на самому ранньому етапі його засвоєння [25].

Контролюючі самостійні роботи можуть включати, поряд з репродуктивними, варіативними та конструктивними, завдання підвищеної складності, які потребують від учнів нестандартного підходу до розв'язання.

Разом з тим М.Р.Леонтьєва недостатньо уваги приділяє пошуковим та творчим самостійним роботам. Акцентуючи увагу на необхідності формування навичок та умінь, автор не визначає шляхів формування контролюючих умінь, прийомів організації самостійної роботи, які б сприяли цьому.

Найбільш чітко діяльнісний підхід до самостійної роботи відображено у працях П.І.Підкасистого, який на основі якісного аналізу структурних елементів діяльності учнів запропонував виділити такі типи самостійних робіт: відтворюючі самостійні роботи за зразком; реконструктивно–варіативні; евристичні; творчі (дослідницькі) [44, с.158].

До відтворюючих автор відносить ті самостійні роботи, які передбачають відтворюючу (репродуктивну) діяльність учнів. У процесі їх виконання розумові операції, розумові й практичні дії учня здійснюються на основі умінь самостійно вчитуватися, вдивлятися в текст підручника чи іншого джерела та виділяти в ньому фактичний матеріал, який дозволяє учню знайти відповідь на питання вчителя, розв'язати завдання, одержати нову інформацію в рамках уже відомих положень, співставляти цей фактичний матеріал з наочно-образним і наочно-графічним матеріалом із життєвого досвіду та донаукових уявлень, а також виділяти в текстуальному чи наочному матеріалі факти, які підтверджують головну думку, структурні елементи навчального матеріалу і т.ін. [44, с.160].

Самостійні роботи за зразком потребують перенесення відомого способу розв'язання в безпосередньо аналогічну чи віддалено аналогічну внутрішньопредметну ситуацію. Ці роботи виконують на основі "конкретних алгоритмів", які раніше були показані вчителем та випробувані учнями при виконанні попередніх завдань [41, с.46].

Всі дії учнів при виконанні самостійних робіт за зразком стають тільки основою формування вмінь планувати особисту пізнавальну діяльність. Цей досвід починає формуватись лише тоді, коли учні виконують уже реконструктивно-варіативні самостійні роботи за перенесенням відомого способу з деякими модифікаціями в незвичайну внутрішньопредметну чи міжпредметну проблемну ситуацію [41,с.48].

Реконструктивно-варіативні самостійні роботи передбачають виконання складніших розумових операцій у порівнянні з відтворюючими. Вони потребують від учня відтворювати не тільки окремі функціональні характеристики знань, але й структуру цих знань в цілому. Тим самим знання поглиблюються, сфера їх застосування поширюється, вони стають досконалими, а мислення, яке виявляється в особистих дедуктивних висновках, досягає рівня продуктивної діяльності [44, с.160-164]. У результаті цього учні підготовлені психологічно та практично до пошуку засобів застосування одержаних знань, тобто до виконання евристичних самостійних робіт.

До евристичних самостійних робіт відносяться ті, під час виконання яких учні усвідомлюють раніше одержані знання в нових логічних зв'язках, вирішують окремі проблемні ситуації чи їх елементи, аналізують причини явищ, доводять чи спростовують гіпотези, які висуває вчитель і т.ін.

Евристичні самостійні роботи потребують виконання таких логічних розумових операцій як аналіз та синтез, порівняння та зіставлення фактів, явищ, виділення в них другорядних ознак, властивостей, застосування прийому аналіз через синтез, розкриття причинно-наслідкових зв'язків тощо. Для набуття навичок та умінь оперувати ними необхідне систематичне застосування наочності, особливо символічної, схематичної, тому що пошукові (евристичні) самостійні роботи, особливо на перших етапах їх використання, викликають труднощі в деяких учнів.

Систематичне виконання подібних самостійних робіт спонукає учнів удаватися до логічних роздумів, щоб визначити істотні зв'язки. Останнє виступає в навчанні передумовою нагромадження та розвитку досвіду творчої діяльності та пізнавальних здібностей [41, с.55].

Творчі (дослідницькі) самостійні роботи відрізняються високим рівнем пізнавальної активності й самостійності учнів. Відтворююча діяльність виступає в них у вигляді окремих елементів, які є складовою частиною загальної структури творчої роботи учнів.

Дослідницькі роботи мають за мету розвиток досвіду творчої діяльності, привчають учнів бачити в незвичайних ситуаціях уже відомі закони, самостійно програмувати особисту пізнавальну діяльність із застосування знань в нових умовах.

Творчі самостійні роботи передбачають наявність умінь при виконанні всіх навчальних операцій, які необхідні для здійснення відтворюючих, реконструктивно-варіативних, евристичних робіт, і поповнюються новими уміннями [41, с.55-58].

Як бачимо, у даній класифікації у першу чергу враховується характер розумової діяльності та рівень самостійності у виконанні завдань, а також засоби, які допомагають учням у досягненні поставленої мети.

Перелічені типи самостійної роботи тісно пов'язані. Той чи інший тип її в реальному навчальному процесі є носієм цілого ряду елементів, характерних і для самостійних робіт інших типів. Цим виражається наступність типів самостійних робіт, які за своєю суттю є основою для забезпечення оптимального засвоєння учнями знань, розвитку їх теоретичних здібностей та оволодіння досвідом творчої діяльності [44, с.161.]

А.В.Усова розробила методичну систему самостійних робіт і класифікувала їх за різними ознаками:

– за дидактичною метою:
  1) засвоєння нових знань, оволодіння умінням самостійно набувати знання;
  2) закріплення й уточнення знань;
  3) вироблення умінь застосовувати знання при розв'язанні навчальних і практичних задач;
  4) формування умінь та навичок практичного характеру;
  5) формування умінь творчого характеру, умінь застосовувати знання у складнішій ситуації;
– за характером навчальної діяльності:
  1) робота з навчальною і науково-популярною літературою;
  2) експериментально-практичні роботи;
  3) аналітико-обчислювальні;
  4) графічні;
  5) проектно-конструкторські;
  6) класифікація й систематизація;
  7) використання знань для пояснення або передбачення явищ і властивостей;
– за значенням самостійної роботи у формуванні понять:
  1) первинне ознайомлення з поняттям, виявлення його суттєвих ознак;
  2) уточнення ознак поняття, відокремлення щойно сформованих понять від раніше засвоєних на основі прийомів порівняння (зіставлення, протиставлення);
  3) вироблення умінь оперувати поняттями при розв'язанні задач пізнавального й практичного характеру;
  4) конкретизація понять;
  5) класифікація й систематизація понять;
  6) використання понять під час розв'язування задач творчого характеру [55, с.7-11].

Сформованість навичок та умінь самостійної роботи визначається відповідними критеріями й рівнями. Кожен рівень характеризується певним складом операцій, які учень може виконувати самостійно. Новий, вищий рівень характеризується вмінням виконувати нові, складніші операції, які потребують вищого рівня розумових дій. Перехід на кожний наступний рівень – це своєрідний якісний стрибок у розвитку вмінь.

Однак, як у визначенні поняття самостійної роботи, так і у визначенні рівнів самостійності немає єдиної точки зору.

І.І.Кулібаба для вимірювання рівнів самостійності учнів використовував два методи: метод зростаючої допомоги вчителя та метод послаблення аналогії. За першим методом рівень самостійності вищий у тих учнів, які упоралися із завданнями без пояснень вчителя, нижчий – кому потрібна була інструкція для виконання завдання і, найнижчий у тих учнів, хто працював над завданням з допомогою вчителя.

Метод послаблення аналогії полягає в тому, що учні на уроці знайомляться із завданнями-зразками та алгоритмом їх виконання. Аналогія між завданнями-зразками і робочими завданнями послаблювалась. Наприклад: для зразка пропонувалась розв'язана задача; потім задавалася 1)задача з видозміненими даними, 2)задача з видозміненими шуканими, 3)задача, обернена до даної, і т.д. все ускладнюючись. Такі письмові роботи теж дозволили одержати дані про рівень самостійності учнів.

У роботі І.М.Чередова відзначається, що рівні самостійного мислення визначаються тим, наскільки учні самостійно можуть перебороти труднощі [59, с.10].

М.І.Махмутов вважає, що вищий рівень самостійності характеризується тим, що викладач створює проблемну ситуацію, а учні самостійно шукають шляхи виходу; нижчий – викладач дає не тільки проблему, а й пропонує шляхи її вирішення [30, с.34].

Ю.К.Бабанський подав, на нашу думку, повніше визначення рівнів самостійності:

- низький рівень – учні прагнуть запозичити готові розв'язання або звертаються за допомогою до вчителя, товаришів;
- середній рівень – учні намагаються самостійно виконати (і частково виконують) навчальне завдання, поставлене вчителем;
- високий рівень – учні вміють самостійно зрозуміти задачу і знайти варіанти її розв'язання, активно міркують, висловлюють свої припущення, доповнюють відповіді товаришів [3,с.85].

П.І.Підкасистий пов'язує види самостійної роботи з рівнями пізнавальної діяльності. Він відзначає, що будь-який рівень самостійності, незалежно від змісту роботи, характеризується загальною особливістю: необхідністю для учнів набути знання, які б дозволили їм розв'язати задачу, що міститься у самостійній роботі.

А.В.Усова і В.В.Зав'ялов розробили модель критеріїв і рівнів сформованості умінь учнів. До критеріїв вони віднесли загальні для всіх пізнавальних умінь особливості виконаних операцій: ступінь усвідомленості дій, повноту й згорнутість виконання операцій, раціональність та послідовність їх виконання.

Виділяючи три рівні сформованості умінь учнів, А.В.Усова вказує, що І рівень (нижчий) дозволяє учневі виконувати лише окремі операції, причому послідовність їх хаотична, дія в цілому погано усвідомлена.

При ІІ рівні (середньому) учень виконує всі операції, з яких складається діяльність вцілому, але послідовність їх виконання недостатньо продумана, дія виконується не досить усвідомлено.

ІІІ рівень (вищий), визначений дослідницею, характеризується тим, що учень виконує всі операції, послідовність їх виконання досить добре продумана, дія в цілому усвідомлена [55,с.19-20].

Для вчителя будуть також корисні рекомендації М.І.Єрецького, який виділив чотири рівні засвоєння учнями навчальної інформації:

І рівень – рівень знайомства, коли учні повинні розпізнати предмети, процеси, об'єкти, якості, якщо є їх опис, характеристика. Або учень може впізнати предмет чи розпізнати його за властивостями. Тобто учневі пропонується не тільки завдання (питання), але й фактично відповідь.

Суть ІІ рівня – рівня відтворення – у тому, що учень може повторити інформацію, виконати типові завдання, які розглядалися у процесі навчання. Він має знання-копії.

ІІІ рівень – це рівень навичок та умінь, який характеризується умінням учня виконувати дію за алгоритмом, що дається на уроці, але за умови, що зміст та умови завдань інші. Тобто учень може виконати типові завдання самостійно, а коли здобуде навички, то майже автоматично.

Що ж до IV рівня, це – рівень творчості, коли учень здатний створити щось нове для нього, хоча вже відоме викладачеві.

Ми погоджуємося з думкою М.І.Єрецького щодо виведення учня на рівень творчості. Для цього зовсім недостатньо, щоб учень тільки опанував знаннями, навичками та уміннями. Слід навчити його самостійно здобувати необхідні знання, уміння та заставити повірити у свої сили, творчі можливості. М.І.Єрецький пропонує для цього ввести в навчальний процес спеціальні творчі завдання, навчання творчої діяльності (наукової й дослідної) за спеціальною методикою [12, с.19].

І.Я.Лернер дає важливу інформацію про поділ на рівні засвоєння знань, в основі якого лежать характеристики їх якості. З них І рівень здатний забезпечити повноту, глибину, конкретність, системність, узагальненість.

ІІ рівень відповідає покращенню цих якостей і формуванню оперативності, усвідомленості, міцності.

Для III рівня характерна гнучкість, тобто готовність учня до самостійного знаходження засобу застосування знань у різних ситуаціях [26,с.41].

Найкраще, на нашу думку, виділив рівні самостійності (за мірою допомоги) В.П.Беспалько. До першого рівня він відносить розпізнавання (відтворення з підказкою, за допомогою ззовні) об’єктів, властивостей процесів, методів діяльності в даній галузі (знання – знайомства) на основі попереднього навчання і ззовні заданої орієнтовної основи дій;

II рівень – це відтворення інформації, операцій, методів діяльності (знання – копії) шляхом самостійного застосування типових правил (алгоритмів) діяльності на основі орієнтованої основи дій (алгоритмічна діяльність);

Щодо III рівня, це – продуктивна реконструктивна діяльність (евристична діяльність), яка виконується не за однозначними правилами-алгоритмами, а з опорою на інтуїцію, домисел, за зразком на певній множині об’єктів. У цьому випадку добувається суб’єктивно нова інформація шляхом самостійної побудови або трансформації раніш відомої орієнтовної основи дій;

IV рівень – продуктивна творча діяльність на будь-якій множині об’єктів шляхом самостійного конструювання нової програми діяльності. У цьому випадку добувається об’єктивно нова інформація. Учень діє “ без правил”, створюючи нові правила дій [4, с.16-18].

Таким чином, усі розглянуті класифікації видів самостійної роботи відображають різні її сторони і не суперечать одна одній. Один і той же вид роботи можна розглянути з точки зору її дидактичного призначення, використаного джерела знань і засобу навчання, характеру діяльності та рівня самостійності учнів. При розробці й практичній реалізації різних видів самостійної роботи потрібно визначити їх дидактичні, розвиваючі й виховні цілі, спроектувати використання різних джерел знань. Крім того, завдання повинні передбачати різні рівні самостійної пізнавальної діяльності учнів: репродуктивний, що характеризується відтворенням знань і способів діяльності, і творчий, для якого характерний дослідницький підхід до задачі, нестандартне її розв’язання, продуктивність результатів.

У навчальному процесі всі ці підходи повинні гармонійно поєднуватися для розробки такої системи самостійних робіт, які, постійно ускладнюючись, сприяли б глибокому засвоєнню основ наук, формуванню загальних і спеціальних предметних умінь, важливих для самоосвіти учнів, а також розвитку активності й самостійності школярів у навчальній і практичній діяльності.

§3.Форми організації навчально–пізнавальної діяльності при виконанні учнями самостійних робіт

Самостійна робота як вид діяльності характеризується цілеспрямованістю, організацією та керівництвом. Тому, виступаючи самостійною навчальною одиницею, вона може бути виражена певною формою – фронтальна, групова, індивідуальна. Звідси внутрішній зміст – це самостійна робота, а зовнішній – форма її вираження.

Індивідуальна робота полягає в тому, що учень виконує свої індивідуалізовані завдання незалежно від товаришів, користуючись при цьому безпосередньою чи опосередкованою допомогою вчителя. Індивідуальна самостійна робота, зумовлена диференціацією навчання школярів, значно розвиває здібності й нахили особистості, розвиває творчі сили, розширює кругозір, забезпечує розвиток інтересу до предмету зокрема і навчання вцілому.

На думку І.Т.Огородникова [34], індивідуальна робота спрямована на розширення й поглиблення знань учнів, розвиток їх індивідуальних здібностей і обдарувань та наближення до творчої роботи над вибраними проблемними питаннями. Успіх її визначається правильним добором завдань, систематичним контролем учителя за їх виконанням, наданням своєчасної допомоги в подоланні труднощів, що виникають у процесі роботи. Істотне значення має те, що, працюючи індивідуально, учень не зв’язаний з класом або з товаришами, просувається своїм темпом. Щоб виконати завдання, він повинен докласти максимум зусиль і самостійності, а це, безумовно, вимагає наполегливості, старанності, завзятості.

Дослідники відзначають, що для слабовстигаючих учнів треба диференціювати не так складність завдання, як міру наданої їм допомоги [3, 42]. При правильній організації індивідуальна робота учнів формує у школярів потребу й навички самоосвіти. Як недолік даної форми виділяють відсутність спілкування між учнями [2].

Можливості використання індивідуальної самостійної роботи розширилися у зв’язку із застосуванням елементів програмованого навчання. Робота над програмованими матеріалами повинна складати частину уроку, не перевищуючи 20-30 хвилин. Програмовані матеріали постійно вдосконалюються: до програм включаються диференційовані завдання різної складності, вводиться додаткова інформація, вказівки, відповіді для самоконтролю тощо. Тому єдина для всіх програма проробляється кожним учнем індивідуально, залежно від його можливостей.

Найбільш характерними ознаками фронтальної форми організації самостійної діяльності учнів є те, що: 1)усі учні виконують спільне для всіх завдання; 2)вчитель дає загальний інструктаж до виконання завдання; 3)учні використовують одні й ті ж засоби навчання; 4)використовуються загальні прийоми організації й керівництва діями учнів [39].

Основна перевага фронтальних робіт полягає в тому, що тут можливі колективні спрямування до загальної мети, розв’язання єдиних завдань, спонукаючих учнів до співробітництва. Проміжні й кінцеві результати самостійної діяльності можуть успішно обговорюватися всіма учнями, підлягати взаємному контролю. Це істотно впливає на якість знань, стимулює пізнавальний інтерес і активність учнів.

У той же час, необхідно відрізняти фронтальну самостійну роботу від загальнокласної фронтальної бесіди або розв’язання навчальної проблеми спільними зусиллями вчителя й учнів. Незважаючи на те, що учні виконують спільне завдання, отримують загальний інструктаж, на фронтальній самостійній роботі кожен учень виконує завдання самостійно, індивідуально, у результаті чого кожен намагається досягнути мети, перш за все, власними зусиллями. Таким чином, досягається поєднання колективної та індивідуальної роботи, до якої залучаються не окремі учні, як це часто буває у процесі загальнокласної роботи, а весь клас.

Фронтальна форма організації самостійної діяльності найбільш доречна, наприклад, тоді, коли учні розпочинають вивчення теми, коли важливо створити позитивний настрій, викликати інтерес до нової теми. Також важлива й корисна вона на початковому етапі формування умінь, коли учні оволодівають способом виконання завдання за зразком. Тому перші задачі й вправи повинні бути типовими, спільними для всього класу, щоб учні, отримуючи загальний інструктаж учителя, швидше усвідомили механізм застосування знань, засвоїли основну схему дій. На цьому етапі важливу роль відіграє колективний аналіз вправ, аналіз типових помилок, допущених учнями у процесі виконання завдань. Школярі мають можливість порівнювати отримані результати своєї роботи з тим зразком, який може бути запропонований учителем для самоперевірки.

Поряд з індивідуальною і фронтальною організацією роботи учнів на уроці існує й така форма, як групова робота учнів, під час якої клас ділиться на декілька груп, що виконують однакові або різні завдання. У залежності від цього розрізняють єдину і диференційовану групову роботу. Ця форма роботи застосовується для розв’язування майже всіх основних дидактичних проблем: вивчення нового матеріалу, розв’язування задач і вправ, закріплення й повторення. У порівнянні з іншими вона характеризується такими особливостями: 1)сприяє реалізації загально-виховних цілей, привчаючи до відповідальності, готовності допомогти іншому, до партнерства; 2)розширює межі міжособистісних стосунків й сприяє виникненню зв’язків між учнями; 3)робить об’єктивним процес самооцінки, підвищує об’єктивність оцінки товаришів; 4)дозволяє кожній групі учнів працювати над завданнями, адекватними їх навчальним можливостям.

Для реалізації диференційованого підходу до навчання і розв'язування власне дидактичних задач у класі виділяються групи учнів, які характеризуються певними типовими рисами. Як критерії диференціації в педагогічній літературі висуваються різні ознаки: рівень знань і навчальних умінь з математики, здібності, інтерес до навчання. На основі цього в класі формуються гомогенні (однорідні) групи учнів з приблизно однаковим рівнем навченості й математичного розвитку. Для цих груп розробляються спеціальні завдання. Кожен член групи працює індивідуально, але може розраховувати на допомогу товаришів, має можливість спілкуватися з ними. Учитель може дати групі загальний інструктаж, організувати обговорення або взаємоперевірку результатів діяльності кожного учня. Це сприяє вирівнюванню знань, ліквідації прогалин, отже, дає можливість учню підвищити рівень знань і умінь та перейти в більш сильну групу.

Х.І.Лійметс відзначає, щоб групування з урахуванням успішності не пригнічувало більш слабких учнів, необхідно щоб склад групи змінювався, був неоднаковим для різних предметів і різних розділів програми. Під впливом групової роботи підвищується успішність навчання саме слабовстигаючих учнів [27].

Загалом, більшість дослідників прийшли до висновку, що слабкі учні краще засвоюють новий навчальний матеріал при фронтальній або груповій роботі, ніж при індивідуальній. Дається взнаки недостатність набутих знань і відсутність необхідних навичок й умінь навчальної роботи. При фронтальній роботі учні цієї групи засвоюють матеріал повніше, але не встигають за загальним темпом роботи класу і в результаті теж відстають, тоді як при груповій роботі учні консультуються із своїми товаришами – це підвищує результативність їх праці.

Що ж стосується учнів з середніми здібностями, то, на думку дослідників, продуктивною для них є як фронтальна, так і групова форма навчальної діяльності. Це пояснюється тим, що при фронтальній роботі вчитель орієнтується саме на цю групу учнів. Сильні учні також отримують значний обсяг і якість знань при фронтальній і груповій формах навчальної діяльності. Проте найбільша результативність їх роботи досягається при індивідуальній формі організації навчання.

Інколи доцільно об'єднувати учнів з неоднаковим рівнем знань і умінь, з різними здібностями. У такій гетерогенній групі можуть співробітничати сильні, середні й слабкі учні. Працюючи в складі такої групи, слабкі учні можуть звернутися за допомогою до більш сильних товаришів, і ця допомога буде продуктивнішою, ніж допомога вчителя в індивідуальній роботі.

Успіх діяльності груп значною мірою залежить і від того, хто є її лідером (консультантом). Консультант з допомогою вчителя розподіляє обов'язки між членами групи після попереднього ознайомлення з матеріалом, розбиває загальне завдання на окремі частини, визначає скільки часу необхідно затратити, за яким планом виконувати роботу, як оформити звіт усієї групи. Разом з цим він керує обговоренням висунутих гіпотез, приймає рішення, навправляє діяльність членів групи й контролює її. Таким чином, функції педагогічного керівництва частково передаються самим учням, а це має не лише освітнє, а й виховне значення.

Така групова форма роботи доцільна при вивченні матеріалу, який має широкі зв'язки з вивченим раніше. Основні положення програмного матеріалу може пояснити сам учитель, а групи можуть продовжити роботу, підбираючи факти, приклади, деталізуючи ці положення й обговорюючи їх. Можлива й самостійна робота з підручником, яка починається після інструктажу учителя і здійснюється індивідуально кожним учнем, але передбачає можливість спілкування у групі в разі потреби. Учні можуть звернутися за допомогою до товаришів, вияснити незрозуміле, врешті, перевірити один одного.

Групова робота може бути направлена також на засвоєння і застосування нових знань, наприклад, при розв'язуванні задач. Самостійна діяльність учнів, яка вимагає актуалізації раніше набутих знань, оволодіння уміннями і пошуку нових знань, має не лише освітнє, а й розвиваюче значення.

Х.І.Лійметс вважав необхідним створення груп за принципом "взаємного збагачення" [27,с.33-49].

Чередов М.І. пропонував об'єднувати учнів на уроці в групи двох видів: 1)організаційні (взаємно симпатизуючих один одному); 2)типологічні групи (за навчанням). За результатами своїх досліджень автор показав, що "диференціація навчання створює умови для підвищення рівня активної діяльності учнів, сприяє різкому підвищенню їх пізнавальних інтересів, підвищенню якості успішності" [59,с.11].

У літературі відзначається доцільність організації групової роботи з метою перевірки знань, навичок та умінь [7, 27, 59]. М.Д.Виноградова, І.М.Чередов підкреслюють необхідність ретельного інструктажу й перевірки знань консультантів, уважного контролю вчителя за правильністю виставлення оцінок у групах, використання оцінки як стимулу, спонукаючого до активної самооцінки знань.

Найбільш високий ефект групової роботи досягається тоді, коли вона гармонійно поєднується з індивідуальною і фронтальною формою організації самостійної навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Справді, матеріал часто можна розподілити на складові логічні частини, які одночасно вивчають створені вчителем групи. Наприклад, учитель повторює з учнями питання про кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Тут слід розглянути три випадки. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними (за умови, що принаймні один з двох коефіцієнтів при змінних не дорівнює нулю): 1) має єдиний розв'язок; 2) не має розв'язків; 3) має безліч розв'язків. У класі створюють три групи учнів, яким пропонують розв'язати, скажімо, такі системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 5x - 2y = 8, \\ x + y = 3, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 2y = 8, \\ 2{,}5x = 9 + y, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 2y = 8, \\ 2{,}5x = 4 + y. \end{cases}$

Учні, що входять до цих груп, виконують завдання індивідуально, після чого спільно обговорюють результати (зауважимо, що перше рівняння в усіх трьох системах однакове; це зроблено для зручності колективного обговорення матеріалу). Учні перевіряють правильність своїх міркувань. Крім того, розглядаючи розв'язки двох інших груп, вони спостерігають, як заміна другого рівняння впливає на кількість розв'язків системи двох рівнянь з двома змінними. Очевидно, що послідовний фронтальний розбір усім класом цих трьох випадків зайняв би в 2-3 рази більше часу [57].

Індивідуальна робота є всепроникаючою, так як розумовий процес пізнання в будь-якому випадку за своєю суттю залишається індивідуальним. Отже, такий спосіб організації є "складовим елементом і фронтальної, і групової форм роботи" [59, с.6].

Таким чином, усі форми організації навчання мають як сильні, так і слабкі сторони, і певною мірою компенсують одна одну. Тому необхідне педагогічно виправдане, гармонійне їх поєднання, обґрунтований та продуманий вибір певної форми з урахуванням цілей і завдань навчання, специфіки матеріалу (особливості навчального предмету, зміст матеріалу), що вивчається, особливостей класу вцілому та окремих його учнів, їх можливостей та віку. При такому підході створюються умови зіставлення результатів, досягнутих одним учнем, з результатами товаришів, формується досвід моральних відношень, взаємодопомоги, співтворчості, взаємо -контролю, спільних переживань за успіхи та промахи в навчальній роботі.

При виконанні самостійних робіт вибір організаційних форм навчальної діяльності визначається рядом вищезазначених факторів, а можливості їх гармонійного поєднання й чергування також визначаються певними умовами. А саме:

- змістом навчального матеріалу;
- рівнем навчальних можливостей школярів даного класу;
- віковими особливостями;
- рівнем підготовки учнів до виконання даної роботи;
- темпом роботи окремих школярів і груп;
- відношенням до даного предмету й виду діяльності;
- мірою керівництва даною роботою з боку вчителя.

§4.Міра допомоги вчителя при організації і проведенні самостійної

роботи

Для організації самостійної роботи особливо важливе розуміння учителем ролі структурних її компонентів. Структуру самостійної роботи визначають змістовна, процесуальна й мотиваційна сторони навчально-пізнавальної діяльності школярів. Мотиваційна сторона забезпечує зв'язок змістовної і процесуальної сторін діяльності з індивідуальними особливостями учнів, мотиви їх діяльності при виконанні самостійної роботи.

Єдність змістовної, процесуальної та мотиваційної сторін і визначає вибір способу розв'язання прикладу, шляху логічних міркувань при доведенні теореми, розв'язуванні задачі. Взаємозв'язок цих сторін є однією з умов отримання добрих результатів.

Щоб самостійна робота була ефективною, необхідно підготувати учнів до її виконання. Підготовка потрібна для того, щоб учні, починаючи виконувати самостійну роботу, мали досить знань і умінь, необхідних для виконання запропонованого завдання. Інакше робота для учнів буде непосильною, вони втратять до неї інтерес і при виконанні завдання не досягнуть передбачуваних результатів.

Підготовка може містити в собі повторення необхідних знань та умінь, повідомлення нових знань учителем, проведення спостережень тощо. У процесі підготовки слід звернути особливу увагу на слабовстигаючих учнів, щоб допомогти їм упорядкувати свої знання, без яких неможливо виконати самостійну роботу.

Кількість часу, що відводиться на підготовку до самостійної роботи, залежить від ступеня її складності й обсягу, а також від підготовленості учнів. У тих випадках, коли вчитель має можливість впевнитися у наявності в усіх учнів відповідних знань і умінь, необхідних для виконання даної самостійної роботи, підготовку можна не проводити зовсім. Зокрема, це можливо при переході від однієї самостійної роботи до іншої, якщо кожна попередня робота детально аналізується й усі недоліки в роботі учнів своєчасно ліквідовуються.

Після підготовки учнів до самостійної роботи треба дати їм чіткі вказівки про обсяг і зміст даної самостійної роботи, про її цілі, а також про техніку виконання, якщо ця техніка їм ще невідома. Учитель повинен вчити долати труднощі, націлювати увагу учнів на основне. Треба, щоб учням була зрозуміла мета завдання, і, як наслідок, у них з'являвся мотив навчальної діяльності. Як зробити саме звичайне завдання цікавим – це залежить від мистецтва вчителя. Ніколи просте дублювання підручника не дасть високого ефекту в навчанні, адже підручник написаний для всіх школярів, а не тільки для ваших вихованців, без урахування того, що їх зацікавить, здивує, викличе труднощі. Тільки враховуючи рівень життєвого й навчального досвіду учнів, можна прогнозувати ефективність навчання. Цікаве завдання максимально сприяє розвитку самостійності учня, збуджує його думку.

У керівництві самостійною роботою учнів треба спочатку використовувати детальний інструктаж і показ зразка роботи. У міру набуття школярами досвіду самостійної роботи вчитель може звільняти свою інструкцію від деталей; усний інструктаж учнів поступово замінювати різними видами письмового інструктажу; а усну підготовку учнів до виконання завдання – виконанням самостійних робіт підготовчого характеру або використанням інструкцій, що вимагають від учнів самостійного пошуку деяких матеріалів, засобів, дій, а також інструкцій, що сприяють творчості школярів. Потрібно також практикувати й планування роботи самими учнями під керівництвом вчителя. Необхідно всіма можливими способами сприяти розвитку у школярів конструктивних здібностей, підтримуючи їх ініціативу, творчість.

Інструктуючи учнів усно, вчитель робить це у доступному для учнів темпі. Якщо учням дається письмова інструкція щодо виконання самостійної роботи, то вчитель звертає їх увагу на необхідність прочитання всієї інструкції в цілому до початку роботи. Учням дається час для усвідомлення завдання роботи та з'ясування вимог до його виконання. Потім учитель перевіряє, чи всі учні зрозуміли, що потрібно і як вони повинні виконати роботу. Особлива увага при цьому звертається на тих учнів, які працюють повільніше від інших. При необхідності вчитель дає їм додаткові пояснення. Нарешті, вчитель перевіряє, чи мають учні все необхідне для роботи: підручники, посібники, таблиці тощо.

Познайомившись з інструкцією до завдання, учні приступають до його виконання. У цей найбільш відповідальний момент, коли особливо напружена думка школярів, учитель слідкує, чи всі учні розпочали працювати, що саме викликає в них труднощі, який темп роботи класу загалом і кожного учня зокрема. Учням, які зазнають труднощів, учитель допомагає індивідуально, ще раз звертає їх увагу на інструкції, нагадує забуте або ставить навідне запитання.

Щоб досягти високої ефективності системи самостійних робіт, необхідно розташувати вправи у такій послідовності, при якій учні йдуть від свідомого наслідування зразка до самостійного виконання роботи.

Яким би простим не було виконане учнями завдання, його треба обов'язково проаналізувати. Оцінюється характер, повнота й зміст виконаної роботи. Такий аналіз необхідний з декількох причин.

По-перше, відомо, що навіть при умілому керівництві з боку вчителя, учні можуть припускатися помилок в самостійній роботі, неправильно зрозуміти завдання. Якщо по закінченні роботи підсумки не підводяться і робота не коректується, то зроблені помилки можуть закріпитися у свідомості учнів. Отже, контроль, перш за все, необхідний для того, щоб закріпити впевненість учнів у правильності виконаної роботи, якщо немає помилок, і допомогти школярам розібратися під керівництвом учителя в знайдених помилках, дати їм можливість їх виправити.

Регулярна перевірка самостійних робіт учнів відразу після їх виконання дає вчителю можливість ліквідувати помилки й прогалини в знаннях і уміннях школярів майже в перший момент оволодіння ними новими знаннями й уміннями, що дуже важливо для досягнення високої успішності учнів.

По-друге, з освітньої точки зору дуже важливо, щоб вчитель мав зовнішній зворотній зв'язок, тобто отримував інформацію про те, як і в якому обсязі учні зрозуміли й засвоїли матеріал, що вивчається.

Аналіз учнівських робіт показує вчителю істинний, а не передбачуваний рівень їх знань і умінь, дає можливість йому об'єктивно оцінювати досягнення кожного учня зокрема і всього класу загалом після будь-якого проведеного ним уроку. Завдяки цьому вчитель отримує можливість зробити висновок про рівень засвоєння навчального матеріалу і спланувати використання необхідних прийомів для подальшої самостійної роботи кожного учня.

По-третє, досвід показує, що перевірка знань і якості виконаних робіт має важливе виховне значення. Вона привчає учнів до ретельного виконання завдань, підтримує на належному рівні їх навчальну активність, формує в них почуття відповідальності за свою навчальну роботу, дисциплінує.

Кращим способом аналізу самостійної роботи є фронтальна бесіда з класом по закінченню виконання учнями самостійної роботи у формі обговорення її ходу й результатів.

Для роботи над типовими помилками відводиться спеціальний час на наступному уроці. Роботу над одиничними помилками, особливо, якщо вони виявили прогалини у знаннях окремих учнів, корисно проводити в позаурочний час, на консультаціях або на уроці за диференційованими завданнями-картками, спеціально підготовленими з цією метою.

Для підвищення ефективності самостійної роботи учнів важливо, щоб поряд із зовнішнім зворотнім зв'язком існував внутрішній – це та інформація, яку учень сам отримує про хід і результати своєї роботи. Однією з можливостей створення зворотного зв'язку є використання елементів самоконтролю і самоперевірки.

Різноманітні види допомоги, які дозволяють здійснити диференційований підхід до учнів, детально розроблені і наводяться в ряді публікацій В.Ф.Харьковської. Наведемо деякі з них:

- зазначення типу задачі, правила, на яке спирається дана вправа;

- додаток до завдання у вигляді рисунка, схеми (і тут можлива диференціація допомоги: рисунок без позначень, рисунок із позначеннями, з виконаною додатковою побудовою або рекомендацією до її виконання тощо);
- запис умови (крім словесної) у вигляді таблиці, матриці, знаків;
- указання алгоритму розв'язання (виконання);
- наведення аналогічної задачі, розв'язаної раніше;
- пояснення ходу виконання подібного завдання;
- пропозиції виконати допоміжне завдання, що наводить на розв'язання основного питання, задачі;
- наведення на пошук розв'язання за допомогою асоціації;
- указання причинно-наслідкових зв'язків, необхідних для виконання завдання;
- називання відповіді, результату задачі;
- розчленування складної задачі на ряд елементарних;
- постановка навідних питань;
- зазначення теорем, правил, формул, на основі яких виконується завдання;
- попередження про найбільш типові помилки, неправильні підходи тощо;
- указання помилки у рисунку, в обчисленнях, у постановці алгоритму роботи, у встановленні залежностей і т.ін. [58,с.36-45].

Дуже важливо, щоб учителі, складаючи багаточисленні картки-консультації, пам'ятки, таблиці порад, пам'ятали: завдання повинні бути підібрані так, щоб слабовстигаючі учні проявляли максимум самостійності, мали реальну можливість для розвитку.

Таким чином, зростання самостійності школярів не спрощує керівні функції вчителя, а навпаки – вони стають більш складними й набувають своєрідного характеру. Учитель планує і організовує діяльність учнів у процесі виконання ними індивідуальної самостійної роботи, інструктує окремих учнів, організовує обговорення результатів роботи. Прийоми й засоби, які він використовує, мають відповідати різним рівням самостійної діяльності учнів і забезпечувати різну міру допомоги у навчанні. При цьому дуже важливо учителю вміти бачити весь клас, уміти слідкувати за тим, як протікає діяльність окремих учнів при виконанні самостійної роботи.

§5.Застосування сучасних засобів навчання для удосконалення організації самостійної роботи учнів

Важливим моментом організації самостійної роботи учнів у навчальному процесі є оснащення її сучасними засобами навчання й максимальне використання їх можливостей. Особливе місце у навчанні школярів займає опанування електронно-обчислювальною технікою. У цих умовах важливого значення набуває не тільки прикладний аспект цієї проблеми, а й психолого-педагогічне обґрунтування вибору й використання сучасних засобів навчання на загальнокласних заняттях і в самостійній роботі.

Нині на допомогу школярам створено велику кількість електронних підручників, навчальних та тренувальних програм з різних дисциплін. Але, на жаль, не всі вони придатні для використання у навчальному процесі в школі, оскільки, здебільшого, вони вимогливі до техніки й розраховані на роботу учня без обмежень часу.

Інструментальні комп’ютерні системи типу GRANI, DERIVE будуть на уроці більш корисними, адже вони позбавлені цих вад, а крім того, дають можливість експериментувати, проводити самостійні дослідження. Вони знімають психологічний бар’єр у навчанні математики, полегшують цей процес, роблять його більш цікавим і наочним та дають кращі можливості для індивідуальної самостійної роботи. Особливо це стосується графічних можливостей комп’ютерних математичних систем. Тільки за допомогою комп’ютера можна швидко та якісно побудувати графік функції, одержати графічний розв’язок рівняння або нерівності; застосовуючи неявно задані функції, розв’язати графічно систему нелінійних рівнянь. При цьому поняття парності/непарності функції, оберненої, періодичної функції, неперервності/розривності функції в точці, розв’язку рівняння або нерівності, системи рівнянь, що вивчаються в школі, стають для учнів зрозумілими й набувають певної наочної інтерпритації. Водночас, знання учнів збагачуються поняттями неявно заданої функції, наближеного розв’язку рівнянь та нерівностей, комплексних коренів рівняння тощо. Комп’ютерні системи, полегшуючи обчислення, спонукають учнів покращувати навички читання графіків, навички визначення координат на координатній площині.

Методичні можливості використання персональних комп’ютерів (ПК) у навчанні при розв’язуванні математичних задач досліджуються в роботах Ю.М.Колягіна, С.О.Бешенкова, М.І.Жалдака та ін.. Ю.М.Колягін вважає, що саме за допомогою ПК можна навчити учнів методу дослідження моделей, при цьому робота учнів набуває дослідницького характеру. “Використовуючи моделі, визначені як набір кількісних відношень або кількісних рівнянь, навчаючі програми можуть застосовувати прийоми, які не доступні традиційним методам навчання.

Змінюючи вхідні дані й параметри моделей, учень може будувати та перевіряти власні гіпотези про можливі тенденції зміни вихідних даних, про вплив цих змін на результат і, таким чином, досліджувати модель процесу або явища”.

С.О.Бешенков підкреслює ефективність застосування комп’ютера як засобу навчального моделювання, аргументуючи це наступними факторами:

- високим рівнем наочності;
- різноманітністю форм подання інформації;
- звільненням від чорнової рутинної роботи;
- можливістю точного дозування й диференціації завдань;
- оперативним контролем і своєчасною допомогою вчителя;
- можливістю проводити різні “математичні” експерименти;
- високим рівнем пізнавальної активності учня в роботі;
- застосуванням елементів самоосвіти [1, с.101].

Різноманітність сучасних засобів відкриває великі можливості також для керівництва пізнавальним процесом. Відомо, що вчитель не завжди має можливість оцінити діяльність усіх учнів класу під час уроку. Проте нові інформаційні технології (НІТ) навчання докорінно змінюють ситуацію. Більшість педагогічно-програмних засобів (ППЗ) побудовано таким чином, що дії учня оцінюються на кожному кроці або після закінчення виконання завдання, а оцінку чи результати роботи, як правило, учень одразу може спостерігати на екрані дисплея. У багатьох ППЗ здійснюється збирання статистичних даних, що стосуються роботи учня з програмою, аналізуючи які вчитель має можливість приділити увагу кожному учневі у необхідному напрямку.

За методичною спрямованістю ППЗ поділяють на:

- контролюючі й навчаючі програми;
- програми-тренажери;
- моделюючі програми;
- імітаційні (ігрові) програми;
- операційні програми;
- інформаційні програми та ін.

Застосування в школі ППЗ для навчання розв’язування задач на ПЕОМ дозволяє ознайомити учнів з особливостями машинно-орієнтованого підходу до пошуку способу розв’язання, привити навики роботи з пакетами й бібліотеками програм.

Для прикладу наведемо фрагмент роботи з навчаючою програмою, мета якої навчити учнів самостійно розв’язувати задачі, аналізувати їх умову, знаходити взаємозв’язки між заданими величинами тощо.

Комп’ютер “пропонує” учневі розв’язати таку задачу:

Від туристичного табору до міста 84 км. Турист їхав на велосипеді з табору в місто із швидкістю 12 км/год, а назад тим же шляхом – із швидкістю 14 км/год. На який шлях туристу знадобиться більше часу і на скільки годин?

Щоб виробити в учня автоматизований навичок визначення умови й питання задачі, вони записані на моніторі, відповідно, синім і червоним кольорами. Учневі пропонується уявити задачну ситуацію, а потім перевірити себе шляхом порівняння уявленого з динамічним сюжетом на моніторі комп’ютера. Рисунок має такий вигляд:

12 км/год   час 1

--------->

ТУДИ ---

табір   84 км   місто

час 2 – ?   14 км/год

<-----------

НАЗАД ---

табір   84 км   місто

Рис.1.

Далі засобами діалогу позначаються дані й шукані величини, визначаються зв’язки між даними, даними і шуканими величинами, що веде до побудови графічної моделі задачі. Ця модель будується на моніторі комп’ютера, але пошук її веде учень, відповідаючи на запитання ПЕОМ:

1. Скільки км велосипедист проїхав з табору в місто?
2. Скільки км велосипедист проїхав назад?

Тут учень з’ясовує, що “туди” й “назад” велосипедист проїхав однаковий шлях – 84 км. На моніторі будується частина графічної моделі:

Схема 1

ШЛЯХ   84

туди   назад

Далі, відповідаючи на третє й четверте питання, учень визначає швидкість велосипедиста при його русі з табору до міста і назад. Зображення графічної моделі на дисплеї доповнюється й приймає вигляд:

Схема 2

ШЛЯХ   84

ШВИДКІСТЬ   12   14

туди   назад

Після цього комп'ютер "допомагає" учневі з'ясувати, в якому співвідношенні знаходяться величини – час, швидкість і шлях, який проїхав велосипедист. І останнє, що визначає учень, – це шукане задачі (точніше, співвідношення, з якого можна знайти шукане: $?^1 - ?^2$, а не $?^2 - ?^1$). Побудована графічна модель задачі має вигляд:

Схема 3

ШЛЯХ	84	
ШВИДКІСТЬ	12	14
ЧАС	$?^1$ ----------------------------------->	$?^2$ -------> ?
	туди	назад

При побудові графічної моделі текст задачі відсутній на моніторі, оскільки учні здатні його запам'ятати. У той же час передбачено виклик тексту задачі й рисунка учнями у будь-який момент розв'язання. Ця модель безпосередньо підводить учня до основної мети – розв'язання задачі. При побудові графічної моделі задачі учень повністю відволікається від її сюжетного змісту й приступає до пошуку розв'язання задачі шляхом аналізу зв'язків між величинами у графічній моделі. Він самостійно будує таку послідовність: щоб знайти ?, треба знайти $?^1$ і $?^2$, а їх можна знайти із співвідношень: $?^1 = 84 : 12$, $?^2 = 84 : 14$.

Коли оптимальний варіант знайдено таким чином, його реалізація вже не викликає труднощів:

1) 84 : 12 = 7 (годин), 2) 84 : 14 = 6 (годин), 3) 7 – 6 = 1 (година).

Це і є аналітична модель задачі. Після цього на моніторі повторюється розв'язання задачі, і учень слідкує не лише за побудовою аналітичної моделі, а й спостерігає зміни в графічній моделі задачі, яка набуває вигляду:

Схема 4

ШЛЯХ	84	
ШВИДКІСТЬ	12	14
ЧАС	7 ----------------------------------->	6 -------> 1
	туди	назад

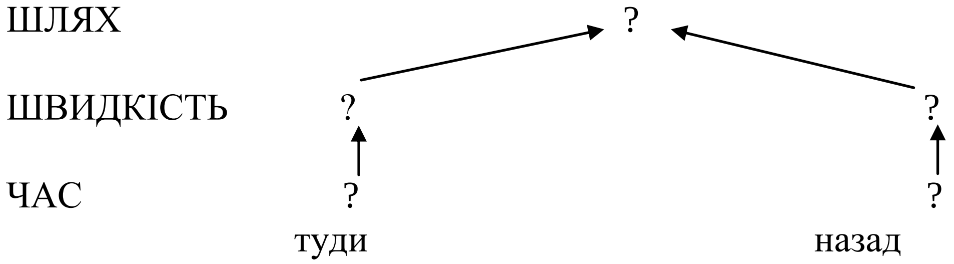
Акцентуючи увагу на самостійній роботі кожного учня, на наш погляд, можна добитися більшого успіху, ніж рухаючись шляхом пасивного списування учнями з дошки ким-небудь розв'язаної задачі.

На наступному етапі роботи доцільно запропонувати таке завдання: "Заповнити даними графічну модель такої задачі:

Турист проїхав на велосипеді відстань від туристичного табору до міста за 5 годин із швидкістю 12 км/год, а назад – за 6 годин. Знайти швидкість велосипедиста на зворотному шляху.

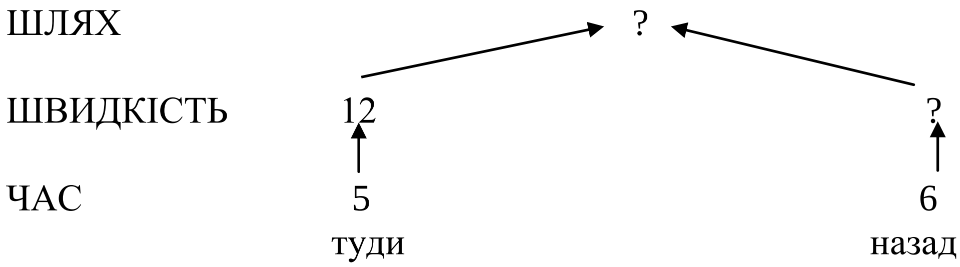
Нижче на цьому ж кадрі програми зображається “кістяк” графічної моделі, з якою учень буде працювати:

Схема 5



Тобто учневі пропонується задача, у якій змінено математичний зміст. Побудова графічної моделі ведеться шляхом діалогу й підстановки у графічну модель даних задачі, визначених у результаті “спілкування” учня з комп’ютером:

Схема 6



ПЕОМ після правильної побудови графічної моделі “пропонує” учневі розв’язати дану задачу. Учень знову працює над структурними зв’язками між даними задачі, подібної до розв’язаної. Він має можливість порівнювати графічні моделі двох задач, виявити основні закономірності й внутрішні зв’язки. Власне, саме розв’язування школярами оберненої задачі уже важливе, та якщо до цього додається елемент аналізу графічних моделей таких задач, то ефективність роботи значно зростає. Так, якщо при розв’язуванні першої задачі учень аналізує зворотній зв’язок $?\leftarrow 12\leftarrow 84$, то тепер він розглядає прямий зв’язок $5\rightarrow 12\rightarrow ?$; аналогічно: $?\leftarrow 14\leftarrow 84$ і $6\rightarrow ?\rightarrow ?$. І це суттєво допомагає учневі виробити стійкі уміння узагальненого способу розв’язування задач (зворотній зв’язок $\boxed{V_1?} \leftarrow t \leftarrow S$, прямий зв’язок $V_1 \rightarrow t \rightarrow \boxed{S?}$).

Дуже важливим є питання вибору місця використання комп’ютера на уроці математики (в рамках використання ППЗ) і часових рамок цього процесу. На нашу думку, результати роботи учнів найбільш ефективні тоді, коли ПЕОМ використовується у першій половині уроку не більше 10-15 хвилин. Учні ніби отримують “поштовх”, вони налаштовуються на активну роботу, що значно підвищує їх працездатність протягом усього заняття. При визначенні максимального часу використання комп’ютера (15 хв) ми керувалися гігієнічними вимогами до уроку й роботи учнів з

ПЕОМ та висновком про недопустимість перетворення уроку в діалог “комп’ютер – учень”, який скорочує цінні хвилини спілкування вчителя з учнями, що є дуже важливим для школярів.

Оцінюючи засоби навчання, необхідно враховувати не тільки інформацію, що міститься в них, а й дії, які повинен виконати учень, щоб отримати цю інформацію. Предметність і новизна використаних у самостійній роботі таких засобів – приладів, комп’ютерів, дидактичних матеріалів та ін. – стимулює активність учнів, позитивно впливає на їх емоційно-вольову сферу.

Жарова Л.В. диференціює засоби навчання з точки зору організації самостійної роботи на два основні види:

1) дидактичні засоби, які є джерелами самостійного набуття знань;
2) засоби, які використовуються для керівництва самостійною діяльністю учнів [18,с.45].

Другий вид засобів називають дидактичними матеріалами і застосовують для здійснення диференційованого навчання учнів, активного управління їх розумовими й практичними діями. Вони допомагають школярам швидше оволодівати способами розв’язання пізнавальних задач, здійснювати взаємоконтроль і самоконтроль. Дидактичні матеріали часто використовуються для доповнення тих джерел знань, з якими учні працюють самостійно. Разом з тим вони можуть виступати і носіями нової для учнів інформації, важливої й необхідної для підсилення розвиваючої та виховної функції самостійної роботи. Такі, наприклад, завдання, що вимагають проведення дослідів у домашніх умовах, завдання, складені на основі базового виробництва тощо. Це мобільний вид засобів навчання, який постійно оновлюється, швидше, у порівнянні з іншими, розробляється і удосконалюється згідно із сучасними вимогами до математичної підготовки учнів.

Серед засобів навчання математики особлива роль належить підручнику. Це головне джерело навчання учнів на сучасному етапі розвитку системи освіти. Підручник, на думку Р.А.Хабіба, є:

1) матеріальним носієм навчальної інформації, викладеної відповідно до вікових можливостей і психологічних особливостей учнів;
2) одним з основних засобів індивідуалізації та диференціації навчання за темпом вивчення і формами навчальної роботи, за складністю та кількістю виконуваних вправ;
3) засобом формування навичок самостійної роботи, пов’язаної з вивченням систематичного курсу математики (і взагалі одним із засобів виховуючого й розвиваючого навчання);
4) одним з найважливіших джерел пізнання, прийоми роботи з яким учні мають засвоїти у процесі навчання [57, с.112-113].

Учитель математики, пояснюючи новий матеріал, активізуючи самостійну роботу школярів на уроці, добиваючись їх інтенсивної навчальної роботи й міцного оволодіння знаннями, навичками і уміннями, передбаченими програмою, використовує підручник як:

1) складовий елемент пояснень, запитань та інших навчальних завдань (текст, навчальне завдання, малюнок, схема, зразки записів тощо);
2) засіб, який допомагає учням надолужити прогалини у знаннях і навичках самостійної роботи, оволодіння якими передбачено програмою з математики;
3) засіб обміну інформацією між учителем і учнями у найбільш раціональній в умовах навчального заняття формі.

Уміння працювати з підручником формуються у процесі як фронтальної, так і індивідуальної навчальної роботи й належать до найважливіших загальнонавчальних умінь. Оволодіння цими уміннями оптимізує, зокрема, процес самостійної домашньої роботи школярів, запобігає їх перевантаженню і нераціональному витрачанню позашкільного часу.

Знайомлячи учнів з підручником, учителю слід звернути увагу на те, як він побудований, як подається й оформляється у ньому теоретична частина, якими способами виділяється у підручнику головне, найважливіше і т.д. Усе це ілюструється конкретними прикладами, розбором параграфів.

Про те, як працювати з теоретичною частиною підручника, можна сказати у спеціальній пам’ятці. Основні її положення можуть бути такими:

1. Спочатку уважно прочитайте назву параграфа: головна його думка, як правило, заключається у самому формулюванні.
2. Потім прочитайте про себе весь параграф. Знайдіть у ньому головне. Відзначте незрозумілі місця. Спробуйте розібратися у них самостійно. Для цього згадайте раніше вивчене, зверніться до попередніх параграфів, а, за необхідністю, й до вчителя.
3. Якщо матеріал великий за обсягом, розділіть його на частини. Озаглавте їх. Складіть план параграфа.
4. Дальше вивчайте параграф частинами. Читайте уважно, вдумливо, намагайтеся зрозуміти кожну фразу, потім абзац, частину параграфа. Не пропускайте матеріал у зв’язному тексті, тому що не зможете зрозуміти наступне.
5. Прочитавши частину параграфа, закрийте підручник і повторіть зміст прочитаного (вслух або про себе). Не намагайтеся відразу дослівно завчити зміст усієї частини параграфа. Краще перекажіть його своїми словами, а вивчіть тільки правило, означення, теорему.
6. Особливу увагу зверніть на формулювання теореми, з’ясуйте: що дано і що потрібно знайти. Не зрозумівши, не приступайте до

доведення теореми. Прочитавши доведення, з’ясуйте: яким методом доводиться теорема, яка ідея цього методу, які його етапи.

7. Виконайте самостійно усі етапи доведення теореми.
8. Якщо ви читаєте про геометричні фігури, спробуйте уявити їх собі окремо і у вказаному взаємозв’язку. Використовуйте готові моделі, макети, муляжі тощо. Вони є не тільки у математичному кабінеті, їх багато навколо нас: кімната, сірникова коробка, стакан, згорнутий лист паперу. Виготовляйте моделі самостійно з пластиліну, сірників, ниток, паперу і т. ін.
9. Так само працюйте над іншими частинами параграфа.
10. Співставте зміст параграфа з прикладами, які даються у підручнику; потім підберіть свої приклади. Дайте відповідь на питання, які розміщені в кінці параграфа.
11. Зробіть висновок з прочитаного, вивченого. З’ясуйте, що нового ви з нього дізналися.

Для старшокласників можна запропонувати правило-орієнтир для складання конспекту, який полегшує засвоєння матеріалу і його відтворення. Правило-орієнтир містить таку послідовність дій [38, с.116]:

- з’ясуйте мету роботи;
- прочитайте весь матеріал параграфа або пункту;
- проведіть його смислове групування;
- виділіть у матеріалі смислові опорні пункти, складіть план;
- запишіть у конспект тему, перший пункт плану;
- подумайте, як краще дати відповідь на питання, використовуючи символіку, умовні позначення, схеми, графіки, рисунки;
- лаконічно, стисло запишіть відповідь на перший пункт плану; перейдіть до другого пункту і т. д.;
- підкресліть головне, покажіть зв’язки у матеріалі, зробіть висновки.

Важливим структурним компонентом підручника є вправи, задачі, завдання, які містяться в кінці кожного пункту, і є його логічним закінченням. Їх пряма функція полягає в організації самостійної діяльності учнів, спрямованої на застосування знань, їх закріплення та формування навичок і умінь. Разом з типовими і аналогічними задачами й вправами необхідно використовувати для організації самостійної роботи задачі, які передбачають пошукову і творчу діяльність, відображають практичні й життєві ситуації.

Щоб ефективно забезпечити управління самостійною роботою учнів, часто використовують елементи програмованого навчання. Програмні засоби, системи завдань активізують пізнавальну та навчальну діяльність, збуджують пізнавальну потребу учнів і стимулюють їх до глибшого засвоєння раніше отриманих і нових знань з математики. Програмоване навчання дає можливість краще здійснювати індивідуальний підхід до учнів і зворотній зв'язок між учнем і вчителем (машиною або підручником). Крім того, програмоване навчання має ряд інших переваг порівняно з іншими методами. Але, навіть при наявності добрих програмованих підручників і комп'ютерів, програмоване навчання має певні недоліки:

1) учень думає, пригадує і відповідає мовчки, а школа повинна навчити учня говорити, розвивати його мову;
2) під час опрацювання матеріалу в учня можуть виникнути різні запитання, він може пропонувати свої доведення, свої розв'язання задач, способи міркування, які ні в підручниках, ні у навчальній машині не передбачені;
3) втома учнів від роботи з комп'ютером, книгою тощо.

Досить часто при самостійному розв'язуванні задач використовують мікрокалькулятори. Звільнення учнів від одноманітної обчислювальної роботи дозволяє приділити більше уваги самому алгоритму обчислень, зробити заняття творчими. З'являється можливість розв'язувати задачі з реальними числовими даними. Висока точність і швидкість обчислень сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів.

Керівництво самостійною роботою учнів значно спрощується завдяки зошитам з друкованою основою, які містять завдання з пропусками. У порівнянні із звичайними стандартними завданнями індивідуалізовані та проблемні навчальні завдання в робочих зошитах дають додатковий ефект у інтенсифікації процесу навчання. Використання робочих зошитів з друкованою основою і прикладених до них бланків контрольних робіт значно полегшує працю вчителя під час самостійної роботи учнів на уроці.

Підвищувати ефективність організації самостійної діяльності школярів дозволяють також засоби екранізації. За допомогою графопроектора можна проектувати на екран завдання самостійної роботи, математичні диктанти, завдання з пропусками, завдання для проведення математичної естафети тощо. Такий прийом організації роботи має свої переваги в тих випадках, коли її завдання потребують аналізу таблиць, малюнків, графіків, їх заповнення, добудови, вибору потрібних даних із довідникового матеріалу, правильних відповідей із запропонованого набору і т.ін.

Під час самостійної роботи корисно винести в поле зору школярів навчальні таблиці, спроектувати на екран діапозитив, що містить інформацію, необхідну для учнів (формули, теореми, зразки розв'язування типових задач) [33, с.26].

Таким чином, використання різноманітних сучасних засобів навчання дозволяє вчителеві цілеспрямовано й ефективно керувати процесом самостійної діяльності учнів, сприяє підвищенню рівня самостійності в опануванні нових знань, формує елементи інформаційної культури учнів і, разом з тим, стимулює інтерес учнів до вивчення математики.

Література до розділу

1. Ашкинузе Е.В., Бешенков С.А. Об использовании ЭВМ в обучении началам анализа // Изучение основ информатики и вычислительной техники в средней школе: Опыт и перспективы / Сост. В.И.Монахов и др. – М.: Просвещение, 1987. – С. 101-111.
2. Бабанский Ю.К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе. – М.: Просвещение, 1985. – 208 с.
3. Бабанский Ю.К. Рациональная организация учебной деятельности. – М.: Педагогика, 1981. – 96 с.
4. Беспалько В.П. Новые методы и средства обучения. – М.: Знание, 1989.
5. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии. – М.: Педагогика, 1989. – 191 с.
6. Буряк В.К. Самостоятельная работа учащихся: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1984. – 64 с.
7. Виноградова М.Д., Первин И.Б. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников. – М.: Просвещение, 1977. – 159 с.
8. Гальперин П.Я., Талызина Н.Ф. Управление познавательной деятельностью учащихся. – М.: Педагогика, 1992. – 262 с.
9. Горошко Ю.В., Пеньков А.В. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики з використанням НІТ // Проблеми інформатизації освіти: Зб. наук. праць. – К., 1993. – С. 47-54.
10. Горошко Ю.В., Пеньков А.В. Розв’язування математичних задач практичного змісту за допомогою комп’ютера // Сучасні інф. технології в навчальному процесі: Зб. наук. праць. – К., 1991.
11. Грудёнов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. – М.: Педагогика, 1987. – 160 с.
12. Ерецкий М.И. Методика совершенствования обучения в техникуме. – М.: Высш. школа, 1989. – 263 с.
13. Есипов Б.П. Самостоятельная работа учащихся на уроках. – М.: Учпедгиз, 1961. – 239 с.
14. Жалдак М.І., Горошко Ю.В. Програма GRAN1 для вивчення математики в школі і вузі. – К.: КДПІ, 1992. – 48 с.
15. Жалдак М.І. Комп’ютер на уроках математики. – К.: Техніка, 1997. – 304с
16. Жалдак М.І., Пеньков А.В. Комп’ютер на уроках математики // Використання нової інформаційної технології у навчальному процесі: Зб. наук. праць. – К.: РНМК, 1990. – С. 17-28.
17. Жалдак М.І. Проблеми інформатизації навчального процесу в школі і вузі // Сучасні інформ. технології у навч. процесі: Зб. наук. праць. – К., 1991.
18. Жарова Л.В. Организация самостоятельной учебно-познавательной деятельности учащихся: Учеб. пос. к спецкурсу. – Л.: ЛГПИ, 1986. – 79 с.
19. Жарова Л.В. Управление самостоятельной деятельностью учащихся: Учеб. пособие. – Л.: ЛГПИ, 1982. – 75 с.

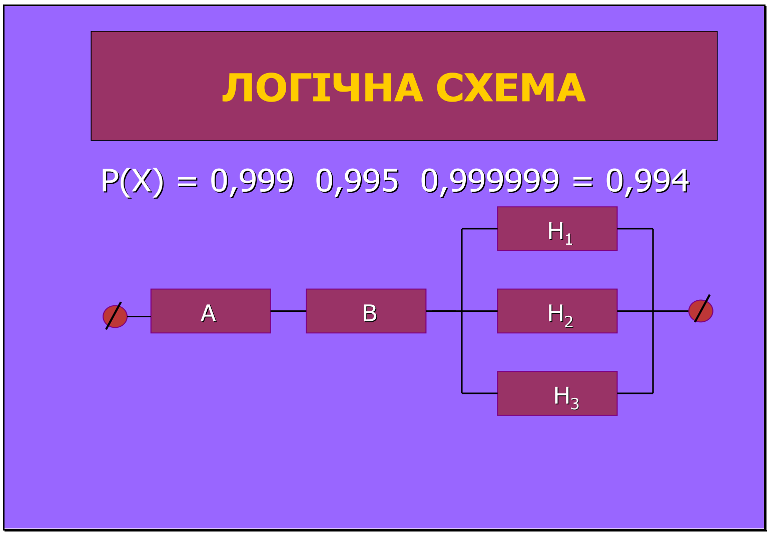
20. Жарова Л.В. Учить самостоятельности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1993. – 205 с.
21. Занков Л.В. Дидактика и жизнь. – М.: Просвещение, 1970. – 175 с.
22. Иржавцева В.П., Федченко Л.Я. Систематизация и обобщение знаний учащихся в процессе изучения математики: Пособие для учителя / Под ред. Н.Л.Коломинского. – К.: Рад.школа, 1989. – 208 с.
23. Ігнатенко М.Я., Соколенко Л.О. Реалізація прикладної спрямованості ШКМ як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1997. – 76 с.
24. Крутецкий В.А. Психология математических способностей школьников. – М.: Просвещение, 1988. – 431 с.
25. Леонтьева М.Р. Самостоятельная работа на уроках алгебры. – М.: Просвещение, 1978. – 64 с.
26. Лернер И.Я. Процесс обучения и его закономерности. – М.: Знание, 1990. – 96 с.
27. Лийметс Х.Й. Групповая работа на уроке. – М.: Знание, 1975. – 64 с.
28. Лупан І.В. Комп'ютерні лабораторні роботи з алгебри, 10-11 кл. – Кіровоград: КДПУ, 2000.
29. Лында А.С. Методика формирования самоконтроля у учащихся в процессе учебных занятий. – М.: Педагогика, 1973. – 137 с.
30. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе. – М.: Просвещение, 1977. – 240 с.
31. Махмутов М.И. Современный урок: Вопросы теории. – М.: Педагогика, 1985. – 184 с.
32. Нильсон О.А. Теория и практика самостоятельной работы учащихся. – Таллин: Валгус, 1976. – 280 с.
33. Нодельман В.С. Использование учебного оборудования при организации самостоятельной работы учащихся // Самостоятельная работа учащихся в процессе обучения математике. – М.: Просвещение, 1988. – С. 16-26.
34. Огородников И.Т. Основные проблемы и методика изучения эффективности урока по основам наук в школе. Материалы по изучению эффективности урока. – М.: Учпедгиз, 1961. – 32 с.
35. Онищук В.А. Урок в современной школе. – М.: Просвещение, 1981
36. Онищук В.О. Вправи для учнів на уроках у 5-8 класах.–К.:Рад. шк., 1966.
37. Онищук В.О. Типи, структура і методика уроку в школі. – К.: Рад. школа, 1973. – 159 с.
38. Осинская В.Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9-10 классах. – К.: Рад. школа, 1980. – 143 с.
39. Основы дидактики / Под ред. Б.П.Есипова. – М.: Просвещение, 1967. – 492 с.

40. Паламарчук В.Ф. Школа учит мыслить. – М.: Просвещение, 1979.–144 с
41. Пидкасистый П.И., Коротяев Б.И. Организация деятельности ученика на уроке. – М.: Знание, 1985. – 80 с.
42. Пидкасистый П.И., Коротяев Б.И. Самостоятельная деятельность учащихся в обучении: Учеб. пособие. – М.: МГПИ, 1978. – 77 с.
43. Пидкасистый П.И. Самостоятельная деятельность учащихся. Дидактический анализ процесса и структуры воспроизведения и творчества. – М.: Педагогика, 1972. – 184 с.
44. Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.
45. Підласий І.П. Закономірності навчання і підвищення якості знань учнів. – К.: Знання, 1981. – 48 с.
46. Підласий І.П. Як підготувати ефективний урок: Кн. для вчителя. – К.: Рад. школа, 1989. – 204 с.
47. Пойа Д. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
48. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
49. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
50. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.
51. Слєпкань З.І., Шкіль М.І., Дороговцев А.Я. та ін. Концепція базової математичної освіти в Україні. – К.: МО України, 1993. – 31 с.
52. Стрезикозин В.П. Организация процесса обучения в школе. – М.: Просвещение, 1968. – 245 с.
53. Татенко О.С. Дидактичні вимоги до самостійної роботи учнів на уроці в 5-8 класах. – К.: Рад. школа, 1966. – 72 с.
54. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.
55. Усова А.В., Завьялов В.В. Самостоятельная работа учащихся в процессе изучения физики: Метод. пособие. – М.: Высш.шк., 1984. – 96 с.
56. Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977. – 208 с.
57. Хабіб Р.А. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики: Метод. посібник. – К.: Рад. школа, 1985. – 154 с.
58. Харьковская В.Ф. Из опыта преподавания математики в средней школе: Пособие для учителей / Сост.: А.В.Соколова, В.В.Пикан, В.А.Оганесян. – М.: Просвещение, 1979. – 156 с.
59. Чередов И.М. О принципе оптимального сочетания фронтальной, групповой и индивидуальной работы с учащимися на уроках. – Омск: Зап.-Сиб. кн. изд-во, 1973. – 136 с.
60. Чередов И.М. Формы учебной работы в средней школе: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1988. – 157 с.
61. Шамова Т.И. Активизация учения школьников.– М.: Просвещение, 1982.
62. Щукина Г.И. Активизация учебно-познавательной деятельности учащихся в учебном процессе. – М.: Просвещение, 1979. – 160 с.

Людмила Лутченко

Розділ III.

Методичні особливості навчання теорії ймовірностей у профільних класах



Сучасна парадигма шкільної математичної освіти потребує враховувати індивідуальність дитини, її інтереси, потреби, схильності, тобто йдеться не тільки про навчання математики, а й про формування особистості засобами математики. А це, в свою чергу, потребує, зокрема, розвинення у всіх школярів імовірнісної інтуїції, статистичної культури, формування імовірнісно-статистичного мислення.

Під імовірнісно-статистичним мисленням розуміють такий вид розумової діяльності, який забезпечує:

- усвідомлення того, що певне явище є детермінованим чи випадковим;
- можливість розрізняння «справедливих» і «несправедливих» ігор, страхувань, лотерей, парі тощо;
- розуміння змісту середніх показників і кількісних характеристик розсіювання статистичних даних;
- сприйняття статистичної інформації, поданої у різних формах і вміння її аналізувати;
- розуміння того, що висновки про властивості всієї сукупності можна робити, досліджуючи репрезентативну вибірку достатньо великого обсягу;
- вміння розрізняти, чи є явища, що досліджуються, статистично стійкими;
- розуміння ролі спостережень, опитувань, експериментів в обґрунтуванні певних тверджень;
- вміння будувати і досліджувати ймовірнісні моделі.

В останні два десятиріччя проблема розвитку в школярів імовірнісно-статистичного мислення набула особливої актуальності та гостроти у зв'язку з новим етапом науково-технічного прогресу і розвитку ринкової економіки. Сучасне суспільство ставить перед громадянами України досить високі вимоги, що стосуються вміння аналізувати випадкові чинники, оцінювати шанси, прогнозувати результати, висувати гіпотези, приймати рішення в умовах, які мають імовірнісний характер.

Відомий спеціаліст у галузі теорії ймовірностей Б.В. Гнеденко неодноразово наголошував на необхідності включення початків теорії ймовірностей у шкільну програму, пояснюючи це тим, що на теорії ймовірностей вже давно ґрунтуються різні галузі науки і виробництва.

Сучасне природознавство широко використовує теорію ймовірностей і статистику для обробки результатів спостережень. На цих розділах науки ґрунтуються сучасні фізика, механіка, астрономія, обчислювальна математика, економіка, військова справа (встановлення оптимальних каналів зв'язку). Сучасний розвиток підприємств, що виробляють масову продукцію, передбачає застосовування теорії ймовірностей і статистики не лише для відбраковування продукції, але й для організації процесу виробництва (статистичний контроль у виробництві).

Взагалі, людська діяльність – це неперервний процес прийняття рішень в умовах невизначеності чи випадковості. Яку встановити ціну, щоб продати товар і одержати прибуток? Яким повинен бути внесок при страхуванні, щоб страхова компанія не мала збитків? З такими та подібними їм запитаннями люди постійно стикаються в повсякденному житті. Тому варто вміти працювати з випадковими явищами і використовувати їх у житті, наукових дослідженнях тощо.

Закономірності, властиві кожному явищу, проявляють себе через сукупність випадковостей. Для багатьох явищ вплив випадку є настільки суттєвим, що дослідження їх неможливе без вивчення і кількісної оцінки такого впливу. ***Теорія ймовірностей*** розглядає математичні моделі явищ, які враховують вплив випадку Аналізом результатів, одержаних за допомогою ймовірнісних моделей, займається ***математична статистика***. Вона розробляє методи, що дають змогу за результатами випробувань робити певні висновки щодо процесів та явищ, які вивчаються.

За програмою профільних класів [19] «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики» вивчаються у 10 природничо-математичному класі Педагогічного ліцею (поурочний план див. додаток 5). У наступних параграфах розглянемо деякі методичні особливості навчання теорії ймовірностей учнів профільного природничо-математичного класу.

§1. Методичні прийоми навчання обчислення ймовірностей подій за допомогою формул та правил комбінаторики

За класичним означенням *імовірністю випадкової події називається відношення числа наслідків випробування (елементарних подій), які сприяють цій події, до загального числа всіх рівноможливих несумісних елементарних подій, які утворюють повну групу*.

Тобто, ймовірність події A дорівнює

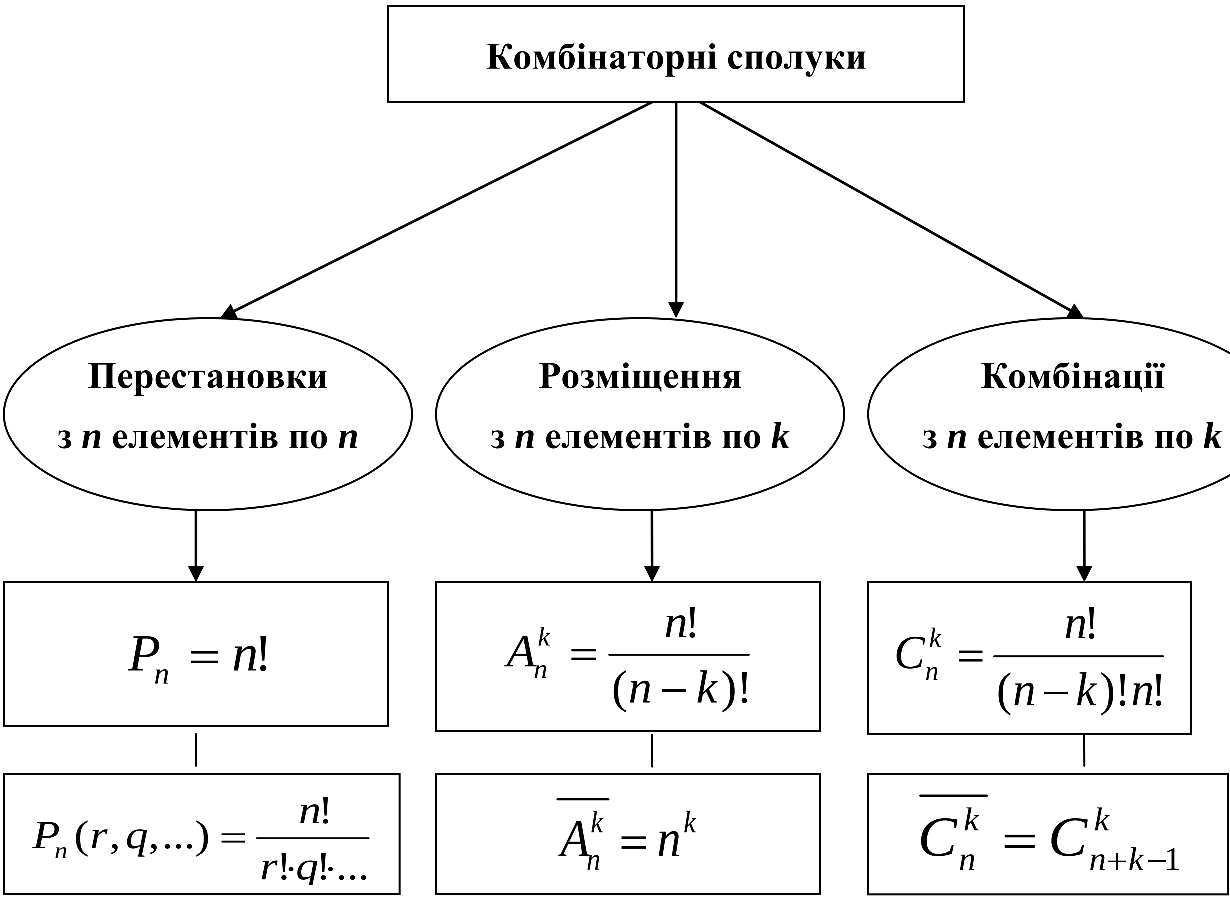
$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – загальне число рівноможливих і несумісних елементарних подій, які утворюють повну групу, m – число елементарних наслідків, які сприяють події A. Таким чином, ймовірність – це частина від цілого, процент. Тому, 0≤P(A)≤1, зокрема, ймовірність вірогідної події P(Ω)=1=100%, а ймовірність неможливої події P(Ø)=0.

Безпосередній підрахунок ймовірностей подій значно спрощується, якщо для попереднього обчислення m і n використати формули комбінаторики. При цьому правильність розв’язування задачі залежить від уміння визначити вид сполук, що утворюються сукупністю подій, про які йдеться в умові задачі.

Враховуючи, що за програмою профільного (природничо-математичного) класу не виділяються окремо години на вивчення комбінаторики [19], необхідно за короткий час сформувати в учнів уміння визначати за фабулою задачі вид сполуки, яку слід застосувати для розв’язування задачі. Тому на початку заняття при введенні понять комбінаторних сполук (перестановки з n елементів, розміщення з n елементів по k елементів, комбінації з n елементів по k елементів) доцільно запропонувати учням схему, що сприятиме правильному визначенню виду сполуки, про яку йдеться в умові задачі (схема 3.1).

Схема 3.1.



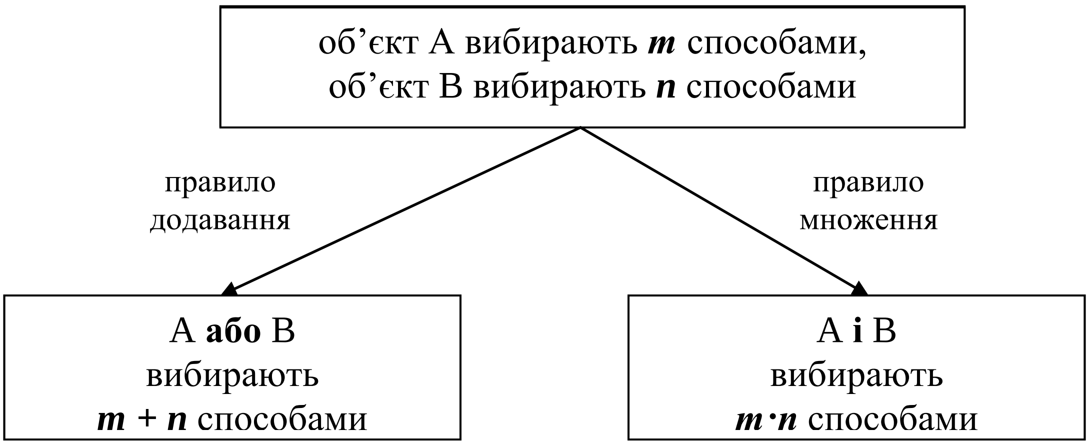
При поясненні схеми слід звернути увагу учнів на характеристичні властивості кожного виду сполук (таблиця 3.1.) та надписати над стрілками ключові слова для вибору сполуки: *порядок* (перестановки), *порядок, елемент* (розміщення), *елемент* (комбінації).

Таблиця 3.1.

Сполуки (без повторень)	**Характеристичні властивості**
Перестановки	• Предмети різні; • усі місця зайняті; • порядок елементів важливий.
Розміщення	• Предмети і місця різні; • $0 \leq k \leq n$; • усі k місць зайняті; • порядок елементів важливий.
Комбінації	• Предмети різні; • $0 \leq k \leq n$; • порядок вибору елементів не має значення.

Комбінаторні правила множення і додавання учні записують у конспект і теж зображають у вигляді опорної схеми 3.2.

Схема 3.2.



Для формування умінь обчислювати ймовірності подій за допомогою формул та правил комбінаторики можна розглянути таку систему вправ:

Задача 1.1. Хлопчик грається розрізною азбукою з 10 карток (зверху однакових на колір і дотик), на звороті яких написано букви “М”, “А”, “Т”, “Е”, “М”, “А”, “Т”, “И”, “К”, “А”. Він картки змішує, витягує декілька з них і розкладає навмання в ряд. Знайти ймовірність того, що

- при витягуванні чотирьох карток отримається слово ”МАМА” (подія A);
- при витягуванні трьох карток отримається слово ”МАТ” (подія B);
- при витягуванні трьох карток отримається слово ”ПАТ” (подія C);
- при витягуванні десяти карток отримається слово ”МАТЕМАТИКА” (подія D).

Розв'язання:

Очевидно, порядок букв у слові має значення, тому обрати чотири картки з десяти можна $n = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ способами. Щоб отрималося слово ”МАМА”, першу букву “М” можна обрати двома способами, першу букву “А” – трьома способами, другу букву “М” – одним способами, а останню букву “А” – двома способами, отже, за комбінаторним правилом множення m=2·3·1·2.

Таким чином, шукана ймовірність події А за класичним означенням рівна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{420}.$$

Аналогічно розмірковуючи, отримаємо:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{A_{10}^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{60}.$$

Букву “П” для слова ”ПАТ” не можна вибрати з наявних букв ніяким чином, тому подія С є неможливою, отже, її ймовірність $P(C)$=0.

10 карток можна розкласти 10! способами – це перестановки з 10 елементів, тому $n = A_{10}^{10} = P_{10}$=10!=1·2·3·4·5·6·7·8·9·10. Сприяють події D m=2·3·2·1·1·2·1·1·1·1=24 способи, тому її ймовірність за класичним означенням дорівнює:

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{24}{10!} \approx 0{,}000007.$$

***Відповідь*: $P(A)$**≈0,0024; $P(B)$≈0,0167; $P(C)$=0; $P(D)$≈0,000007.

<u>Задача 1.2</u>. У ліфті 6 пасажирів, ліфт зупиняється на 11-ти поверхах. Яка ймовірність того, що жодні два пасажири не вийдуть на тому самому поверсі?

Розв'язання:

Нехай А-шукана подія, ймовірність якої треба обчислити. Перший пасажир може вийти на кожному з 11 поверхів, тобто маємо 11 способів. І кожний наступний i-тий пасажир теж може вийти на 11-ти поверхах, тобто 11 способами. Отже, загальна кількість способів n, яким можуть вийти 6 пасажирів рівна n=11·11·11·11·11·11=11^6, що рівне числу розміщень з повтореннями $\overline{A}_n^k = \overline{A}_{11}^6 = 11^6$.

Оскільки 6 пасажирів можуть вийти на 6-ти різних поверхах з 11-ти поверхів, причому для пасажирів важливий номер поверху, а якому він вийде, тобто порядок розташування елементів у групі, то число способів m

сприятливих для настання події **А** рівне числу розміщень з 6-ти елементів серед 11 елементів, тобто $m = A_{11}^{6}$.

Таким чином,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_{11}^{6}}{\overline{A_{11}^{6}}}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{11^{6}}\approx0{,}1878.$$

Відповідь: $P(A)\approx 0{,}1878$.

__**Задача 1.3.**__ З 6 однакових карток розрізної азбуки: "а", "е", "м", "н", "о", "р" навмання вибирають 4 картки й складають їх в ряд по рядку, яка ймовірність отримати при цьому слово "море"?

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_{6}^{4}}=\frac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot3}=\frac{1}{360}\approx0{,}0028.$$

Відповідь: $P(A)\approx 0{,}0028$.

Після розв'язування ще 1-2 таких задач, де в основному використовуються розміщення, варто дати наступну задачу:

__**Задача 1.4.**__ Букви розрізної абетки „л", „р", „в", „е", „о", „с" розкладають випадковим порядком у ряд. Яка ймовірність того, що у будь-якому місці ряду отримається слово „лев"?

Як правило, учні починають розв'язувати таку задачу аналогічно до попередніх, тому слід зразу ж акцентувати увагу на зміни в умові: ми ***не вибираємо*** з 6-ти карток три, щоб скласти слово „лев", ми ***всі*** картки (всі шість) розкладаємо випадковим порядком у ряд, тому загальна кількість елементарних випадків рівна числу перестановок з 6-ти елементів $n=P_6=6!$

Розв'язання:

Щоб учні більш чітко зрозуміли, як обчислюється кількість випадків, що сприяють шуканій події, можна пояснити процес розв'язування задачі наприклад так: нам необхідно, щоб три картки „л", „е", „в" були поруч. Уявимо собі, що ми їх склеюємо боковими сторонами (або «зв'язуємо») і тоді вже чотири елементи („лев", „р", „о", „с") розташовуються випадковим порядком у ряд, причому, якщо ми замінимо в об'єкті „лев" хоча б одну букву, або просто змінимо їх порядок, то не отримаємо того, що вимагається в умові задачі, так як букви не повторюються і порядок букв у слові важливий. Отже, $m=P_4=4!\cdot1$. Таким чином, шукана ймовірність

$$\mathrm{P(A)}=\frac{m}{n}=\frac{P_4\cdot1}{P_6}=\frac{4!}{6!}=\frac{4!}{4!\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5\cdot6}=\frac{1}{30}\approx0{,}033.$$

Відповідь: $\mathrm{P(A)}\approx 0{,}033$.

Для закріплення пропонуємо наступну задачу, відмінність якої полягає в тому, що діти, яких ми садимо поруч, можуть сісти двома способами: *Іванко-Оленка* або *Оленка-Іванко*.

<u>Задача 1.5</u>. П'ятеро дітей сідають на лавочку в парку. Яка ймовірність, що двоє з них (Іванко й Оленка) сидітимуть поруч?

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{P_4\cdot 2}{P_5}=\frac{4!\cdot 2}{5!}=\frac{4!\cdot 2}{4!\cdot 5}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

Відповідь: *P(A)*=0,4.

<u>Задача 1.6</u>. Бібліотекар викладає на полицю 9 книг. Яка ймовірність того, що три певні книги будуть стояти поряд?

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{P_7\cdot P_3}{P_9}=\frac{7!\cdot 3!}{9!}=\frac{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{7!\cdot 8\cdot 9}=\frac{1}{4\cdot 3}=\frac{1}{12}\approx 0{,}083.$$ (Три «зв'язані» книги можуть всередині зв'язки бути розміщені 3!=6 способами: 123, 132, 213, 231, 312, 321).

Відповідь: P(A)≈0,083.

Наступні дві задачі пропонуємо учням розв'язати самостійно, через кілька хвилин один учень коментує розв'язування задач, інші перевіряють правильність свого розв'язання, виправляють помилки, якщо вони є.

<u>Задача 1.7</u>. На 6 однакових картках написано букви "А", "В", "К", "М","О", "С". Картки змішують і розкладають навмання в ряд. Яка ймовірність того, що отрималося слово "МОСКВА"?

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{P_6}=\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{720}\approx 0{,}0014.$$

***Відповідь*:** P(A)≈0,0014.

<u>Задача 1.8</u>. Кожну букву, що входить у слово "вдосконалення" виписано на окрему картку. Яка імовірність того, що після ретельного перемішування й виймання п'яти карток отримаємо слово "скеля"?

Розв'язання:

У сполуках з тринадцяти букв по п'ять, нас цікавлять букви і їх черговість (порядок). Отже, $n=A_{13}^5$. З усіх випадків лише один сприяє появі слова "скеля", тому m=1. Шукана імовірність

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{A_{13}^5}=\frac{1}{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}=\frac{1}{154440}.$$

Відповідь: 1/154440.

На наступних задачах 9-11 відпрацьовуємо уміння розв'язувати задачі, де використовуються комбінації (порядок елементів неважливий, з *n* елементів вибираємо $k<n$).

Задача 1.9. У лотереї з 50 квитків 8 виграшних. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних квитків два будуть виграшними?

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_8^2\cdot C_{42}^3}{C_{50}^5}=\frac{\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{42\cdot 41\cdot 40}{1\cdot 2\cdot 3}}{\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{4\cdot 7\cdot 7\cdot 41\cdot 40}{5\cdot 49\cdot 4\cdot 47\cdot 46}=\frac{41\cdot 4}{47\cdot 23}=\frac{164}{1081}\approx 0{,}1517$$

Відповідь: P(A)≈0,1517.

Задача 1.10. Яка ймовірність вгадати 5 номерів у лотереї „Спортлото" 5 із 36?

Розв'язання:

$$\mathrm{P(A)}=\frac{m}{n}=\frac{C_5^5\cdot C_{31}^0}{C_{36}^5}=\frac{1\cdot 1}{\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}}=\frac{1}{6\cdot 7\cdot 34\cdot 33\cdot 8}=\frac{1}{376992}\approx 0{,}0000026\,.$$

Відповідь: P(A)≈0,0000026.

Задача 1.11. У ящику 36 деталей, 9 з них – браковані. Обчислити ймовірність того, що серед 7 взятих навмання деталей 3 буде бракованих.

Розв'язання:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_9^3\cdot C_{27}^4}{C_{36}^7}=\frac{\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{27\cdot 26\cdot 25\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}{\frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}}=\frac{3\cdot 4\cdot 7\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{34\cdot 33\cdot 8\cdot 31\cdot 30}\approx 0{,}1766\,.$$

Відповідь: P(A)≈0,1766.

Задача 1.12. З 28 кісточок доміно випадково вибираються дві. Яка ймовірність того, що з них можна скласти "ланцюжок" відповідно до правил гри?

Розв'язання:

Серед 28 кісточок доміно є сім дублів, тобто кісточок виду (i, i), i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 та 21 кістка виду (i, j), де $i\neq j$. Всього з 28 кісточок доміно ми можемо вибрати C_{28}^2 пар, отже, $n=C_{28}^2=378$.

Якщо перша кістка є дублем, то її можна вибрати сімома способами. При цьому другу кістку доміно можна вибрати шістьма способами, щоб кістки можна було співставити. Таким чином, ми маємо 7·6=42 пари, де перша кістка є дублем.

Якщо перша кістка містить різні числа, то її можна вибрати 21 способом. При цьому другу кістку доміно можна вибрати 12 способами, щоб з них можна було скласти “ланцюжок” відповідно до правил гри. Отже, ми маємо 21·12=252 пари, де перша кістка доміно не дубль.

Таким чином, маємо 42+252=294 пари, що задовольняють умові задачі. Але при підрахунку пар ми враховували порядок вибору кісточок доміно, а за умовою задачі пари не розрізняються по порядку. Отже, m=0,5·294=147 елементарних подій, що сприяють даній події A.

За класичним означенням ймовірності маємо:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{147}{378}=\frac{7}{18}\approx 0{,}389 .$$

Відповідь: P(A)≈0,389.

Коли учні навчаться працювати з певною (невеликою) кількістю елементів (лотерейні квитки, деталі тощо), розрізняти типи задач й визначати комбінаторні сполуки, необхідні для обчислення шуканих ймовірностей, тоді їх кількість вже немає принципового значення. Для здібних учнів, які цікавляться математикою, можна в домашнє завдання включати такі задачі:

Задача 1.13*. Серед N виробів M бракованих. Навмання беруть n виробів. Яка ймовірність того, що серед них m бракованих виробів ($m<n$)? Яка ймовірність того, що серед них більше ніж m бракованих виробів?

Відповідь: $\dfrac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};\ \sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

Задача 1.14*. У лотереї є n квитків, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів.

Відповідь: $\sum\limits_{s=1}^{\min(m,r)}\dfrac{C_m^s\cdot C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$.

Задача 1.15*. На іспиті може бути запропоновано N запитань. Студент знає відповіді на n запитань. Екзаменатор задає студентові k запитань, а для того, щоб скласти екзамен, треба відповісти не менше, ніж на r запитань ($r<k$). Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

Відповідь: $\sum\limits_{i=r}^{k}\dfrac{C_n^i\cdot C_{N-n}^{k-i}}{C_N^k}$.

Їх розв’язання краще розібрати детально на додатковій консультації з учнями, що цікавляться математикою.

§2. Використання наочних схем під час вивчення теорем додавання і множення ймовірностей та їх наслідків

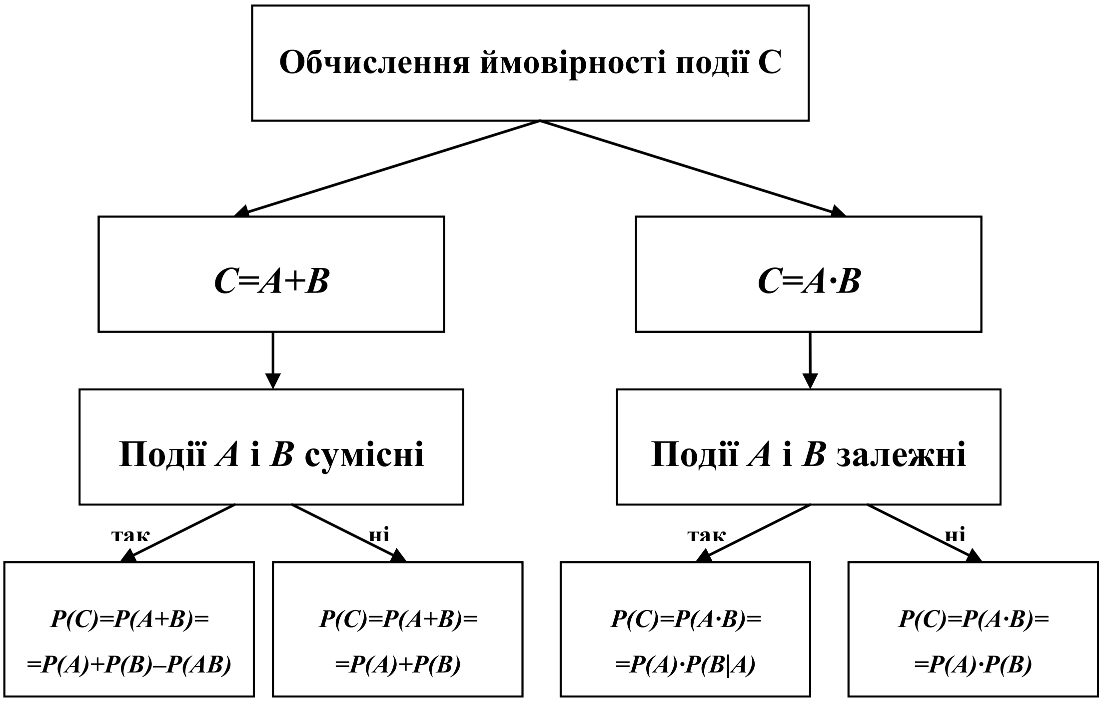
Реалізація принципу наочності під час вивчення математики необхідна умова, що забезпечує ефективність навчання і умови для запобігання формалізму. Наочність сприяє утворенню ясних і точних образів сприймання і уявлення, полегшує учням перехід від сприймання конкретних предметів до сприймання абстрактних понять про них шляхом виділення і словесного закріплення спільних суттєвих властивостей понять. Але розуміння теоретичного матеріалу ще не гарантує повного його засвоєння, тим більше, що час перекодування інформації із короткочасної пам'яті в довготривавлу в кожної людини суто індивідуальний. Швидкому переведенню інформації з короткочасної й оперативної пам'яті в довготривалу сприяє використання опорних схем, конспектів.

Під час складання опорних схем, конспектів слід орієнтувати учнів на загальновідомі дидактичні принципи:

- лаконічність (при сприйнятті й запам'ятовуванні обсяг короткочасної оперативної пам'яті обмежений, тому загальна кількість знаків не повинна перевищувати 180-200, конспект повинен мати якнайменше слів, букв, знаків, малюнків тощо);
- виділення головного (використовують різні геометричні фігури, кольори, розміщення слів по вертикалі та навскоси, стрілками показують зв'язки між інформацією, підкреслюють або виділяють шрифтом головне та ін.);
- уніфікація (виражається у вигляді абревіатур, умовних знаків, малюнків);
- оригінальність (опорні конспекти повинні бути різноманітними за формою, структурою, графічним виконанням);
- компактність (одну сторінку зручно читати, така інформація й краще запам'ятовується);
- доступність (символіка повинна бути зрозумілою для всіх учнів);
- опорний конспект повинен виражати закінчену думку [20].

Наприклад, для розв'язування простих задач на обчислення ймовірності події, що є результатом додавання або множення двох інших подій, можна використовувати таку схему-підказку (схема 3.3) [23]:

Схема 3.3.



Задача 2.1. У грошо-речовій лотереї на кожну 1000 квитків випадає 25 грошових і 15 речових виграшів. Куплено два квитка. Яка ймовірність, що випаде: 1) на перший квиток грошовий виграш, а на другий – речовий виграш; 2) хоча б на один квиток виграш?

Розв'язання. 1) Позначимо через $P(A)$ ймовірність грошового виграшу на перший квиток, $P(B/A)$ – ймовірність речового виграшу на другий квиток. Так як обидва квитка купили одночасно, то події A та B залежні. Тоді ймовірність виграти гроші на перший квиток ***і*** якусь річ на другий буде $P(AB)=P(A)\,P(B/A)$.

За класичним означенням ймовірності

$P(A)=\frac{25}{1000}$, $P(B/A)=\frac{15}{999}$. Тоді $P(AB)=\frac{25}{1000}\ \frac{15}{999}\approx 0{,}000375$.

2) Позначимо через C «виграш на перший квиток», а через D – «виграш на другий квиток». Оскільки обидва квитка можуть бути виграшними одночасно, то події C і D сумісні. Тоді ймовірність ***хоча б одного*** виграшу на два квитка буде $P(C+D)=P(C)+P(D)-P(CD)$.

За класичним означенням ймовірності $P(C)=P(D)=40/1000$, тоді $P(D/C)=39/999$. За теоремою добутку ймовірностей $P(CD)=P(C)P(D/C)$ $P(CD)=40/1000\cdot 39/999\approx 0{,}00156$. Отже, $P(C+D)=40/1000+40/1000-0{,}00156$ $\approx 0{,}07844$.

***Відповідь*:** 1) ≈0,000375; 2) ≈0,07844.

<u>Задача 2.2.</u> Три стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення в ціль для першого стрільця дорівнює 0,75, для другого – 0,8, для третього – 0,9. Визначити ймовірність того, що а) всі три стрільці одночасно влучать в ціль; б) в ціль влучить хоча б один стрілок.

Розв'язання. а) Позначимо через $P(A)$ ймовірність влучення в ціль для першого стрільця, через $P(B)$ – для другого стрільця, через $P(C)$ – для третього стрільця. За умовою $P(A)$=0,75, $P(B)$=0,8, $P(C)$=0,9.

За теоремою добутку ймовірностей три стрільця одночасно влучать в ціль з ймовірністю

$P(ABC)= P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$=0,75·0,8·0,9=0,54.

б)Ймовірність промаху першого стрільця $P(\bar{A})$=1–0,75=0,25, для другого стрільця – $P(\bar{B})$=1–0,8=0,2, для третього – $P(\bar{C})$=1–0,9=0,1, тоді ймовірність промаху всіх стрільців одночасно

$P(\overline{ABC})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$=0,25·0,2·0,1=0,005.

Подія, що заключається у влучанні в ціль хоча б одного стрільця, протилежна події $P(\overline{ABC})$, тому P=1–$P(\overline{ABC})$=1–0,005=0,995.

***Відповідь*:** а) 0,54; б)0,995.

Розв'язування складних задач на обчислення ймовірності події, що є результатом додавання або множення декількох подій, які в своя чергу теж є результатом додавання або множення 2-3 елементарних подій, полегшується, якщо до задачі складаються логічні схеми. Геометричне зображення змісту задачі наочно ілюструє зв'язок між даними, допомагає правильно визначити дії над подіями. Як правило послідовне з'єднання елементів передбачає використання теореми множення, а паралельне – теореми додавання ймовірностей подій. Проілюструємо використання логічних схем на прикладах розв'язування складних задач 2.3-2.5.

<u>Задача 2.3</u>. Літак може потерпіти аварію, якщо буде відмова або конструкції планера, або двигунної системи, або системи керування. Двигунна система складається з трьох двигунів. Відомо, що ймовірність відмови конструкції 0,001, двигуна 0,01, системи керування 0,005. Знайти ймовірність безаварійного польоту, якщо відмови – події незалежні.

Розв'язання.

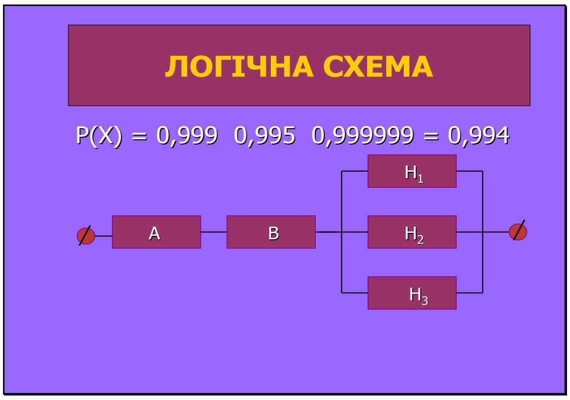


Рис.3.1

Логічна схема, що подається на рис. 3.1, включає:

- A – подія, що полягає у відмові конструкції планера;
- B – відмова системи керування;
- H_i – відмова *i*-го двигуна, *i*=1, 2, 3.

Нехай $\overline{X}$ – відмова (аварія) літака, а X – безаварійний політ. Із аналізу логічної схеми випливає

$X=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{H}$, де $H=H_1\cap H_2\cap H_3$.

Тоді $P(X)=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\ P(\overline{H})$,

$P(\overline{A}) = 1–P(A) = 0,999$, $P(\overline{B}) = 1–P(B) = 0,995$,

$P(\overline{H}) = 1–P(H) = 1–P(H_1)\ P(H_2)\ P(H_3) = 0,999999$.

Отже,

$$P(X)=0,999\cdot 0,995\cdot 0,999999\approx 0,994.$$

Відповідь: ймовірність безаварійного польоту ≈0,994.

__**Задача 2.4**__. За деякий проміжок часу амеба може загинути з ймовірністю 1/4, вижити з ймовірністю 1/4 і поділитися на дві з ймовірністю 1/2. в наступний такий же проміжок часу з кожною амебою незалежно від її "походження" відбувається теж саме. Скільки амеб і з якими ймовірностями може існувати на кінець другого проміжку часу?

Розв'язання. Логічна схема до задачі подана на рис.3.2.

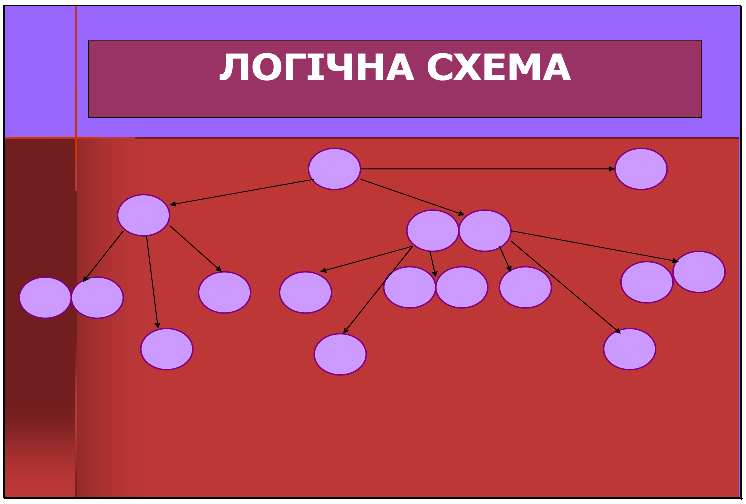


Рис.3.2

Аналізуючи її приходимо до висновку, що на кінець другого проміжку часу може існувати:

- **0** амеб, якщо І амеба загинула, ***або*** спочатку вижила ***і*** потім загинула, ***або*** поділилася на дві ***і*** кожна з них (***і*** перша, ***і*** друга) загинула;

$$P(0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{11}{32};$$

- **1** амеба, якщо І амеба вижила ***і*** знову вижила, ***або*** поділилася на дві ***і*** одна з них вижила, ***і*** інша загинула;

$$P(1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{32};$$

- **2** амеби, якщо І амеба вижила ***і*** поділилася на дві, ***або*** І амеба поділилася на дві ***і*** кожна з них вижила, ***або*** І амеба поділилася на дві ***і*** одна з них загинула ***і*** інша поділилася на дві;

$$P(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{9}{32};$$

- **3** амеби, якщо І амеба поділилася на дві ***і*** одна з них вижила, ***і*** інша поділилася на дві;

$$P(3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{16}=\frac{4}{32};$$

- **4** амеби, якщо І амеба поділилася на дві ***і*** кожна з них поділилася ще на дві.

$$P(4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{4}{32}.$$

Контроль: $\frac{11}{32}+\frac{4}{32}+\frac{9}{32}+\frac{4}{32}+\frac{4}{32}=\frac{32}{32}=1.$

Відповідь: на кінець другого проміжку часу може існувати 0, 1, 2, 3, 4 амеби відповідно з ймовірностями $\frac{11}{32},\frac{1}{8},\frac{9}{32},\frac{1}{8},\frac{1}{8}$.

<u>Задача 2.5</u>. За даними перепису населення (1891 р.) Англії й Уельсу встановлено: темноокі батьки й темноокі сини (AB) склали 5% обстежених осіб, темноокі батьки й світлоокі сини ($A\bar{B}$) – 7,9%, світлоокі батьки і темноокі сини ($\bar{A}B$)– 8,9%, світлоокі батьки й світлоокі сини ($\bar{A}\bar{B}$) – 78,2%. Знайти зв'язок між кольором очей батька і сина.

Розв'язання. За умовою P(AB)=0,05, P($A\bar{B}$)=0,079, P($\bar{A}B$)= =0,089, P($\overline{AB}$)=0,782. Складемо логічну схему (рис.3.3).

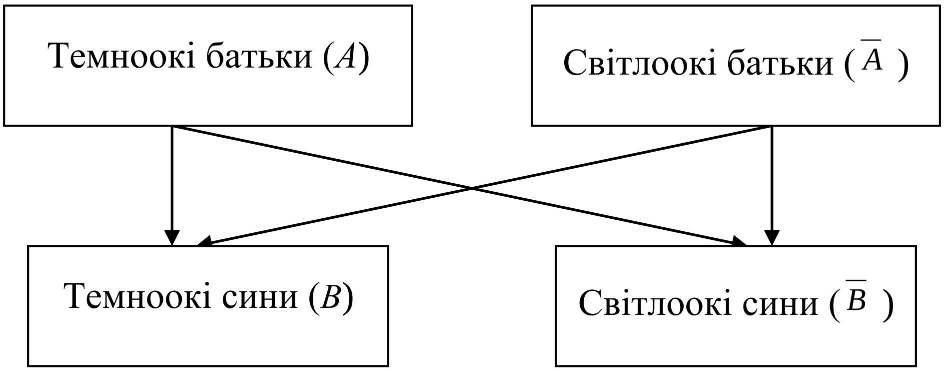


Рис.3.3.

Знайдемо умовну ймовірність того, що син темноокий, якщо батько темноокий:

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})}=\frac{0{,}05}{0{,}05+0{,}079}=0{,}39.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що син світлоокий, якщо батько темноокий:

$$P(\overline{B}\,|\,A)=1-P(B\,|\,A)=1-0{,}39=0{,}61.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що син темноокий, якщо батько світлоокий:

$$P(B\,|\,\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{0{,}089}{0{,}089+0{,}782}=0{,}102.$$

Знайдемо умовну ймовірність того, що син світлоокий, якщо батько світлоокий:

$$P(\overline{B}\,|\,\overline{A})=1-P(B\,|\,\overline{A})=1-0{,}102=0{,}898.$$

Відповідь: якщо батько темноокий, то ймовірність того, що син темноокий 0,39, а що син світлоокий 0,61; якщо батько світлоокий, то ймовірність того, що син темноокий 0,102, а що син світлоокий 0,898.

Коли учні навчаються працювати з двома, трьома подіями, тоді їх кількість немає принципового значення.

Задача 2.6. Кожна з κ_1 урн містить m_1 білих і n_1 чорних куль, а кожна з κ_2 урн містить m_2 білих і n_2 чорних куль. З навмання взятої урни вийняли кулю, яка виявилася білою. Яка ймовірність того, що кулю взято з першої групи урн?

Розв'язання. Позначимо через A подію «вийнята куля – біла». Біла куля може бути вийнята з I групи урн (гіпотеза H_1) *або* з II групи урн (гіпотеза H_2).

Імовірності цих гіпотез $P(H_1)=\frac{k_1}{k_1+k_2}$, $P(H_2)=\frac{k_2}{k_1+k_2}$. Якщо куля вийнята з I групи урн, то ймовірність того, що вона біла $P(A|H_1)=\frac{m_1}{m_1+n_1}$, якщо ж – з II групи урн, то $P(A|H_2)=\frac{m_2}{m_2+n_2}$.

Згідно формули повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=$$

$$=\frac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_1}{m_1+n_1}+\frac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_2}{m_2+n_2}.$$

Оскільки подія A відбулася, треба переоцінити ймовірність гіпотези H_1 (куля вийнята з I групи урн) згідно формули Байєса:

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{\frac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_1}{m_1+n_1}}{\frac{k_1}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_1}{m_1+n_1}+\frac{k_2}{k_1+k_2}\cdot\frac{m_2}{m_2+n_2}}=\frac{k_1m_1(m_2+n_2)}{k_1m_1(m_2+n_2)+k_2m_2(m_1+n_1)}.$$

Відповідь: $P(H_1\,|\,A)=\frac{k_1m_1(m_2+n_2)}{k_1m_1(m_2+n_2)+k_2m_2(m_1+n_1)}$.

Задача 2.7. З урни, яка містить m білих $(m>3)$ і n чорних куль, загублено одну кулю. Для того, щоб визначити склад куль в урні, з урни взяли дві кулі, які виявилися білими. Обчислити ймовірність того, що загублена куля – біла.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що взяті дві кулі є білими. Це може відбутися при настанні двох гіпотез: H_1 – загублена біла куля, H_2 – загублена чорна куля.

$$P(H_1)=\frac{m}{m+n},\ P(H_2)=\frac{n}{m+n}.$$

Умовні ймовірності події A при цьому рівні:

$$P(A|H_1)=\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2},\ P(A|H_2)=\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}.$$

Згідно формули повної ймовірності:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=$$

$$=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{m-1}{m+n-1}\cdot\frac{m-2}{m+n-2}+\frac{n}{m+n}\cdot\frac{m}{m+n-1}\cdot\frac{m-1}{m+n-2}.$$

Умовну ймовірність того, що загублена куля – біла обчислимо згідно формули Байєса:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-2}{m+n-2}}{\frac{m}{m+n} \cdot \frac{m-1}{m+n-1} \cdot \frac{m-2}{m+n-2} + \frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1} \cdot \frac{m-1}{m+n-2}} =$$

$$= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2+n)} = \frac{m-2}{m+n-2}.$$

Відповідь: $P(H_1 \mid A) = \dfrac{m-2}{m+n-2}$.

Задача 2.8. В урну, яка містить n кульок, опущена біла кулька, після чого навмання вийнято одну кульку. Знайти ймовірність того, що вийнята кулька виявиться білою, якщо всі припущення про початковий склад кульок (за кольором) рівноможливі.

Розв'язання. Позначимо через A подію «вийнята куля – біла». Введемо у розгляд події H_i (i=1, 2,…, n+1), що описують початковий склад куль в урні і H'_i – після опущення білої кулі:

H_1={0 білих і n небілих}; H'_1={1 біла і n небілих};

H_2={1 біла і (n-1) небілих}; H'_2={2 білих і (n-1) небілих};

H_3={2 білих і (n-2) небілих}; H'_3={3 білих і (n-2) небілих};

…

H_n={(n-1) біла і 1 небіла}; H'_n={n білих і 1 небіла};

H_{n+1}={n білих і 0 небілих}; H'_{n+1}={n+1 білих і 0 небілих}.

Оскільки всі n+1 припущень про початковий склад куль (за кольором) рівноможливі, то

$$P(H_1)= P(H_2)=\ldots= P(H_i)=\ldots= P(H_{n+1})= \frac{1}{n+1}.$$

Тоді умовні ймовірності події A рівні:

$$P(A|H_1)= \frac{1}{n+1},\ P(A|H_2)= \frac{2}{n+1}, \ldots,\ P(A|H_i)= \frac{i}{n+1}, \ldots,\ P(A|H_{n+1})= \frac{n+1}{n+1}.$$

Отже, ймовірність події A згідно формули повної ймовірності рівна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \ldots + P(H_i) \cdot P(A \mid H_i) + \ldots + P(H_{n+1}) \cdot P(A \mid H_{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{n+1} \cdot \left[\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{i}{n+1} + \ldots + \frac{n+1}{n+1} \right] = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1+(n+1)}{2} \cdot (n+1) =$$

$= \dfrac{n+2}{2(n+1)}$, як сума членів арифметичної прогресії.

Відповідь: $P(A) = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

§3. Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей в старшій школі

Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей – це орієнтація змісту і методів навчання на застосування знань з теорії ймовірностей в техніці, економіці, медицині, біології та інших суміжних науках; в професійній діяльності, в народному господарстві та побуті.

Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей включає в себе його політехнічну спрямованість, в тому числі, реалізацію міжпредметних зв'язків, використання електронно-обчислювальної техніки і забезпечення «комп'ютерної грамотності», формування ймовірнісно-статистичного мислення і діяльності.

Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей передбачає оволодіння старшокласниками математичними методами пізнання об'єктивної реальності навколишнього світу, одним з яких є побудова дискретної ймовірнісної моделі задачі. У процесі навчання теорії ймовірностей слід виділяти найважливіші компоненти розв'язування прикладних задач, які зводяться в основному до таких трьох етапів:

- перехід від реальної ситуації до рівняння, нерівності, графічного зображення тощо (побудова математичної (ймовірнісної) моделі реальної ситуації);
- розв'язування рівняння, нерівності і т.д. (дослідження математико-статистичними методами і засобами побудованої моделі);
- співставлення отриманого розв'язку з реальною ситуацією (інтерпретація знайденого розв'язку).

Цінність стохастичних задач визначається не стільки тим математичним апаратом, який використовується при їх розв'язуванні, скільки можливостями продемонструвати процес застосування математики, зокрема теорії ймовірностей, для розв'язання прикладних задач. Ці задачі повинні знайомити учнів з реальними застосуваннями стохастичних ідей і методів, а також служити для організації специфічної імовірнісно-статистичної діяльності.

Наведемо декілька задач практичного характеру, розв'язування яких сприяє формуванню мотивації навчання, посилення інтересу до вивчення теорії ймовірностей, дає можливість переконати старшокласників у необхідності та практичній корисності вивчення нового теоретичного матеріалу, показати учням, що математичні абстракції виникають з практики життя.

Задача 3.1. 500 фірм отримали кредити в банку. Банк класифікує кожен кредит за двома характеристиками: сума кредиту і термін кредиту (в місяцях). Відповідну класифікацію наведено в таблиці.

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	Менша \$2000	\$2000-4999	\$5000-7999	Більша \$8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

Для перевірки навмання вибирається одна фірма:

а) Яка ймовірність того, що сума кредиту цієї фірми не менша \$5000?

б) Яка ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років?

в) Яка ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу \$2000, на 42 місяці?

Розв'язання. а) Ймовірність того, що сума кредиту даної фірми не менша \$5000 рівна:

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	Менша \$2000	\$2000-4999	\$5000-7999	Більша \$8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

$$P(A) = \frac{(0+5+86+99+110)+(0+0+5+37+50)}{500} = \frac{392}{500} = 0{,}784;$$

б) ймовірність того, що термін кредиту фірми більший двох років рівна:

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	Менша \$2000	\$2000-4999	\$5000-7999	Більша \$8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0

36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

$$P(B)=\frac{(1+20+86+5)+(0+31+99+37)+(0+0+110+50)}{500}=\frac{439}{500}=0{,}878;$$

в) ймовірність того, що фірма взяла кредит на суму, не меншу $2000, на 42 місяці рівна:

Термін кредиту (місяці)	Сума кредиту			
	Менша $2000	$2000-4999	$5000-7999	Більша $8000
12	30	2	0	0
24	4	20	5	0
36	1	20	86	5
42	0	31	99	37
48	0	0	110	50

$$P(C)=\frac{31+99+37}{500}=\frac{167}{500}=0{,}334.$$

Відповідь: $P(A)$=0,784; $P(B)$=0,878; $P(C)$=0,334.

Задача 3.2. Вкладники банку за сумами вкладів та віком мають такий процентний розподіл:

Вік	Суми вкладу		
	Менше $1000	$1000-5000	Більше $5000
Менше 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
Більше 50 років	7%	10%	2%

Нехай A та B – такі події:

A = {у навмання вибраного клієнта вклад більший $5000} ,

B = {вік навмання вибраного клієнта більший 30 років}.

Визначити: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

Розв'язання.

Вік	Суми вкладу		
	Менше $1000	$1000-5000	Більше $5000
Менше 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
Більше 50 років	7%	10%	2%

$P(A)$=8%+20%+2%=30%=0,3.

Вік	Суми вкладу		
	Менше $1000	$1000-5000	Більше $5000
Менше 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
Більше 50 років	7%	10%	2%

$P(B)$=(8%+25%+20%)+(7%+10%+2%)=72%=0,72.

Вік	Суми вкладу		
	Менше $1000	$1000-5000	Більше $5000
Менше 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
Більше 50 років	7%	10%	2%

$P(A \cup B)$=8%+(8%+25%+20%)+(7%+10%+2%)=80%=0,8.

Вік	Суми вкладу		
	Менше $1000	$1000-5000	Більше $5000
Менше 30 років	5%	15%	8%
30-50 років	8%	25%	20%
Більше 50 років	7%	10%	2%

$P(A \cap B)$=20%+2%=22%=0,22.

Відповідь: $P(A)$=0,3; $P(B)$=0,72; $P(A \cup B)$=0,8; $P(A \cap B)$=0,22.

Задача 3.3. У супермаркеті, аналізуючи 10 000 покупок за типом товарів і типом розрахунків (готівка чи кредитна картка, виявлено такий процентний розподіл:

Тип розрахунку	Тип товару, %			
	Жіночий одяг	Чоловічий одяг	Спортивні товари	Господарчі товари
Каса	6	9	3	7
Кредитна картка	41	9	22	3

Нехай A, B, C, D – такі події:
A = {навмання вибраний рахунок, сплачений кредитною карткою},
B = {навмання вибраний рахунок за жіночий одяг},
C = {навмання вибраний рахунок за чоловічий одяг},
D = {навмання вибраний рахунок за спортивні товари}.
Обчислити $P(A)$, $P(B\bigcap A)$, $P(A\bigcap D)$, $P(A\bigcup B)$, $P(A\bigcup C)$.

Відповідь: $P(A)$=0,75, $P(B\bigcap A)$=0,41, $P(A\bigcap D)$=0,22, $P(A\bigcup B)$=0,81, $P(A\bigcup C)$=0,84.

Задача 3.4 *(геометричні ймовірності)*. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна – 3 години, а другого – 5 годин.

Розв'язання:

Позначимо час приходу до причалу I судна через x, II судна – через y. Оскільки обидва судна можуть підійти протягом доби, то простір елементарних подій

$$\Omega=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{l}0\le x\le 24;\\ 0\le y\le 24.\end{array}\right.\right\}-\text{квадрат зі стороною } a=24.$$

Другому судну доведеться чекати розвантаження I судна, якщо воно приходить до причалу під час стоянки I судна. Умовою цього є виконання нерівності: $x\le y\le x+3$. Першому судну доведеться чекати звільнення II судна, якщо воно підійде до причалу під час стоянки II судна, що виражається нерівністю: $y\le x\le y+5$.

Заштрихована на рис.3.4 область, що відповідає даним нерівностям, сприяє події A. Тоді ймовірність події A={одному з суден доведеться чекати звільнення причалу} рівна:

$P(A)=\dfrac{S_\Omega-(S_1+S_2)}{S_\Omega}$, де $S_\Omega=S_{кв}=a^2=24^2$; $S_1=\dfrac{1}{2}\cdot(24-3)^2$ – площа трикутника

ABC, $S_2=\frac{1}{2}\cdot(24-5)^2$ – площа трикутника MPT.

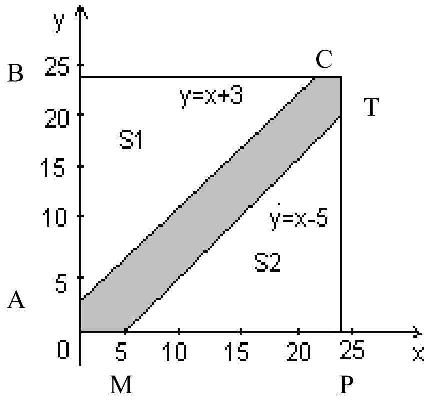


Рис.3.4

Отже, $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{24^2-\frac{21^2+19^2}{2}}{24^2}=1-\frac{802}{1152}\approx 1-0{,}69618=0{,}30382$.

Відповідь: $P(A)\approx 0{,}30382$.

<u>**Задача 3.5**</u>. Обчислити імовірність неповернення позичальником кредиту банку (кредитний ризик щодо позичальника), якщо фахівцями банку було встановлено, що: а) позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміні пролонгації в повному обсязі з імовірністю 0,17; б) позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована з імовірністю 0,06; в) позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору, тобто без пролонгації з імовірністю 0,01.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в неповерненні позичальником кредиту банку; A_1 – позичальник погасить узяту позику після її пролонгації і в терміні пролонгації в повному обсязі; A_2– позика буде винесена на прострочення після того, як вона була пролонгована; A_3 – позика буде винесена на прострочення відразу після закінчення терміну дії кредитного договору. Подія A виконується, коли відбувається *або* подія A_1, *або* подія A_2, *або* подія A_3, тобто $A=A_1+A_2+A_3$. Оскільки події A_1, A_2, A_3 є несумісними, то $P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3)=P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}17 + 0{,}06 + +0{,}01 = 0{,}24$.

Отже, кредитний ризик щодо позичальника становить 0,24=24%.

Відповідь: $P(A)$ = 0,24=24%.

<u>**Задача 3.6**</u>. Позичальник може не повернути кредит банку при впливі хоч би одного з таких чинників ризику: галузевому (переорієнтація економіки,

зменшення попиту на продукцію даної галузі); системному (зміни в економічній системі, які можуть негативно вплинути на фінансовий стан позичальника, гаранта, страховика); форс-мажорному (землетруси, повені, катастрофи, смерчі, страйки, військові дії); суб'єктивному (репутація позичальника, гаранта, страховика в діловому світі, їх відповідальність і готовність виконати взяті зобов'язання); юридичному (недоліки в складанні та оформленні кредитного договору, гарантійного листа, договору страхування). Визначити імовірність неповернення кредиту банку, якщо задані імовірності кожного з чинників ризику.

Розв'язання. Нехай подія A полягає у неповерненні позичальником кредиту банку. Кожний з чинників кредитного ризику можна розглядати як подію. Подія A може відбуватися при настанні хоча б однієї з сумісних незалежних подій, що мають імовірності: $P(A_1)$ – імовірність галузевого чинника, $P(A_2)$ – імовірність системного чинника ризику, $P(A_3)$ – імовірність форс-мажорного чинника, $P(A_4)$ – імовірність суб'єктивного чинника, $P(A_5)$ – імовірність юридичного чинника ризику. Згідно формули імовірності настання хоча б однієї з незалежних подій отримуємо:

$P(A)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3))(1-P(A_4))(1-P(A_5))$.

Відповідь: $P(A)=1-(1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3))(1-P(A_4))(1-P(A_5))$.

Задача 3.7. Двоє по черзі кидають монету. Виграє той, хто першим викине "тризуб". Знайти ймовірність подій:

а) гра закінчиться до 4-го кидання;
б) виграє той, хто почав гру (перший гравець);
в) виграє другий гравець.

Розв'язання. Пронумеруємо черговість кидання монети. Тоді підкидання з непарними номерами i=1, 3, 5, … проводяться I гравцем, з парними номерами i=2, 4, 6, … II гравцем. Нехай A – шукана подія; A_i – в i-му підкиданні випав «тризуб»

а) Подія A означає, що гра закінчиться до 4-го кидання тобто або на I киданні – подія A_1 (виграє I гравець), або на II киданні – подія A_2 (виграє II гравець і I програє) або на III киданні – подія A_3 (виграє I гравець, попередньо програє I і II гравець).

Отже, подія A є сумою несуміжних подій: $A= A_1+\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$.

Оскільки імовірність p випадання «тризуба» рівна $\frac{1}{2}$, відповідно імовірність не випадання $q=1-p=\frac{1}{2}$, то ймовірність події А рівна:

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A_1},A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(A_1)+P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{8}.$$

б) Подія A – «виграє І гравець» є сумою несумісних подій: $A=A_1+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5+\ldots$, де події $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3},\ldots,\overline{A_{2k+1}}$ – незалежні між собою. Тоді імовірність події A рівна:
$$P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{2k+1}}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2k}}+\ldots)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

в) Подія A виграє ІІ гравець є сумою несумісних подій: $A=\overline{A_1}\cdot A_2+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}A_6+\ldots$. Але простіше обчислити ймовірність цієї події, враховуючи, що $P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, так як події «виграє І гравець» та «виграє ІІ гравець» – протилежні.

<u>Задача 3.8</u>. При переливанні крові потрібно враховувати групу крові донора й хворого. Людині, що має четверту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тої ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити тільки кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% – другу, 20,9% – третю і 7,9% – четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.

Розв'язання. Нехай подія A – «хворому перелити кров можна», B_i – «у донора i-та група крові», H_i – «у хворого i-та група крові».

Хворому можна перелити кров при виконанні таких гіпотез:
H_1 – «у хворого І група крові», ймовірність цієї гіпотези $P(H_1)$=0,337, H_2 – «у хворого ІІ група крові», її ймовірність $P(H_2)$=0,375, H_3 – «у хворого ІІІ група крові», $P(H_3)$=0,209, H_4 – «у хворого IV група крові», $P(H_4)$=0,079.

Якщо у хворого І група крові, то йому можна перелити кров донора лише І групи крові. Отже, умовна ймовірність події А при виконанні гіпотези H_1 рівна $P(A|H_1)=P(B_1)$=0,337. Якщо у хворого ІІ група крові, то йому можна перелити кров донора з ІІ або І групою крові, тобто $P(A|H_2)=P(B_1)+P(B_2)$=0,337+0,375=0,712 – як сума ймовірностей двох несумісних подій B_1 і B_2.

Аналогічно якщо у хворого III група крові, то йому можна перелити кров донора тієї ж групи крові або першої, тому $P(A|H_3)=P(B_1)+$ $+P(B_3)=0{,}337+0{,}209=0{,}546$.

Якщо у хворого IV група крові, то йому можна перелити кров будь-якої групи, отже, $P(A|H_4)=1$.

За формулою повної ймовірності $P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+$ $+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) + P(H_4)\cdot P(A/H_4) = 0{,}337\cdot 0{,}337 + 0{,}375\cdot 0{,}712 + 0{,}209\cdot 0{,}546 +$ $+ 0{,}079\cdot 1 \approx 0{,}574$.

Відповідь: P(A)≈0,574.

Задача 3.9. Комерційний банк надає кредити трьом фірмам. Імовірність неповернення кредиту для I-ї фірми - 1%; для II-ї 8,2%; для III-ї - 5,4%. Визначити частки кредитів, які повинен надати комерційний банк, виходячи із умови рівності можливих обсягів неповернених кредитів відносно кожної фірми. Знайти загальний ризик неповернених кредитів комерційному банку.

*Розв'язання:*Оскільки вся інформація носить імовірнісний характер, то ризик визначимо як імовірність неповернення кредиту комерційному банку від кожної фірми.

Введемо у розгляд такі події:
A: «комерційному банку не повертають кредити»;
H_1: «перша фірма дістає кредит від банку»;
H_2: «друга фірма дістає кредит від банку»;
H_3: «третя фірма дістає кредит від банку».

Відповідні їм імовірності будуть: $P(A)$, $P(H_1)$, $P(H_2)$, $P(H_3)$. Останні три імовірності рівні часткам x_1 x_2, x_3 загального кредиту, що надає банк кожній з фірм. Тоді виходячи з умови, що $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, частка кредиту, наданого III фірмі буде: $x_3 = 1 - (x_1 + x_2)$.

Оскільки є три гіпотези (події), при яких може відбутися неповернення кредиту комерційного банку, то використаємо формулу повної імовірності:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3),$$

де $P(A/H_1) = 0{,}01$; $P(A/H_2) = 0{,}082$; $P(A/H_3) = 0{,}054$ – умовні імовірності неповернення кредиту банку, якщо кредит був наданий відповідно I, II, III фірмі.

На основі формули Байєса і рівності ризиків з умови задачі отримуємо таку систему рівнянь:

$$P(H_1)P(A/H_1) = P(H_2)P(A/H_2),$$
$$P(H_1)P(A/H_1) = P(H_3)P(A/H_3).$$

Або $x_1 = 8{,}2 \cdot x_2$

$6{,}4 \cdot x_1 \cdot +5{,}4 \cdot x_2 = 5{,}4.$

Виконавши елементарні перетворення над системою, отримаємо:

$x_1 = x_2 \cdot 0{,}082,$

$x_1 \cdot 0{,}01 = (1 - x_1 - x_2) \cdot 0{,}054.$

Розв'язок буде такий:

$x_1 = 0{,}76503$; $x_2 = 0{,}093296$; $x_3 = 0{,}141674$.

Отже, $P(H_1) = 0{,}76503$; $P(H_2) = 0{,}093296$; $P(H_3) = 0{,}141674$.

Звідси, ризик неповернення кредиту кожною фірмою рівний:
$P(H_1)P(A/H_1) = P(H_2)P(A/H_2) = P(H_3)P(A/H_3) = 0{,}01 \cdot 0{,}76503 = 0{,}0076503$.

Загальний ризик неповернення кредиту банку рівний
$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = 3 \cdot P(H_1)P(A/H_1)$, таким чином, $P(A) = 3 \cdot 0{,}0076503 = 0{,}02295$.

Висновок. З виділеного кредиту банком загальною сумою 1000000 грн треба надати I фірмі – 765030 грн, II – 93296 грн, III – 141674, причому є ризик, що з кожних 100000 грн банку не буде повернуто 2295 грн, тобто з виділеного 1000000 грн фірми не повернуть 22950 грн.

Таким чином, за допомогою певних модифікацій цілий ряд традиційних задач теорії ймовірності можуть стати задачами прикладного характеру. Розширення кола таких задач у навчанні математики позитивно впливає на відношення учнів до вивчення математики, підвищує мотивацію учіння. Участь стохастичної проблематики в математичній та загальній освіті стає більш всесторонньою. Такі задачі:

- сприяють засвоєнню не тільки методів прикладної математики, але й перш за все методів і принципів опису реальних життєвих ситуацій на математичній мові;
- учать раціонально вибирати адекватний математичний апарат для розв’язування прикладних задач;
- підводять до математичного «відкриття», формують пізнавальні потреби, вказують на необхідність розширення знань, виховують стійкий пізнавальний інтерес;
- підвищують мотивацію введення імовірнісних понять і теорем, розвивають інтуїтивне уявлення про ймовірносно-статистичні поняття і методи;
- знайомлять учнів з методологією математики і особливим характером стохастичних висновків;

- демонструють відмінності в характері двох світів – світу математики і реальних ситуацій – в яких проходять три етапи розв’язування прикладної задачі;
- дають можливість підсилити міжпредметні зв'язки за допомогою застосування стохастичних методів в різних областях знань і практики.

§4. Тестовий контроль під час навчання теорії ймовірностей

Для діагностики успішності навчання учнів, розробляються спеціальні досить короткі, стандартизовані або нестандартизовані завдання, що дозволяють за порівняно короткі проміжки часу оцінити вчителем (або самими учнями) результативність пізнавальної діяльності школярів, тобто оцінити ступінь і якість досягнення кожним учнем цілей навчання. Ці завдання різними науковцями називаються тестами навчальних досягнень, тестами успішності, дидактичними тестами тощо.

Відмінність між тестами визначаються цілями їх застосування. При цьому вони виконують різні функції, серед яких можна назвати:

- мотиваційну (тести, які включають задачі прикладного характеру, викликають цікавість і створюють позитивну мотивацію навчання);
- інформаційно-діагностуючу (тести дають інформацію про обсяг знань, умінь та навичок учнів, зокрема, виявляють тих, що не засвоїли базові поняття, формули тощо);
- навчальну (аналізуючи результати тестування, вчитель акцентує увагу на ключових моментах, де більшість учнів допустили помилки, повторюючи й систематизуючи при цьому матеріал, що вивчається);
- корекційну (тести використовують під час корекції знань, умінь та навичок (ЗУН) учнів);
- контролюючу (тести застосовують для контролю та оцінки ЗУН школярів);
- виховну (систематичне застосування тестів сприяє посиленню інтересу до знань, розвиває уміння систематично працювати, формує навички самоконтролю, самооцінку);
- розвиваючу (тестування розвиває пам’ять, логічне мислення; завдання на застосування знань в зміненій або незнайомій ситуації формують в учнів уміння аналізувати задачу, узагальнювати, робити висновки, сприяють прояву їх творчого потенціалу).

Працюючи з учнями природничо-математичного класу, ми дійшли висновку, що система тестового контролю під час навчання школярів теорії ймовірностей повинна включати такі етапи: 1) стимулююче-мотиваційний; 2) навчаючий; 3) діагностико-коректуючий та 4) контролююче-оцінний (схема 3.4).

Схема 3.4.

На *стимулюючо-мотиваційному етапі* вчитель формує у старшокласників мотиви навчання, стійкий пізнавальний інтерес до предмету, розвиває відповідальність та сприяє змагальності учнів, стимулює їх бажання поліпшити свої результати. З цією метою бажано подати тестові завдання у дещо незвичній оригінальній формі.

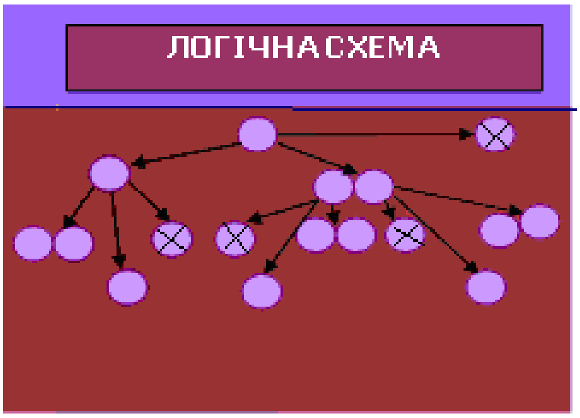
Навчаючий етап передбачає систематичне використання тестових завдань, які сприяють формуванню самостійності та пізнавальної активності школярів. Навчаючи, вчитель повинен враховувати вікові та індивідуальні особливості учнів, формувати в них позитивну мотивацію навчання, стійкий пізнавальний інтерес до математики, попереджати виникнення негативних психічних станів та сприяти їх усуненню, надавати своєчасну допомогу тим, хто відстає у навчанні.

Серед різноманітних видів допомоги вчителя, які дозволяють здійснити диференційоване навчання учнів розв’язуванню задач, ми на навчаючому етапі використовували такі:

- додаток до завдання у вигляді рисунка, схеми (і тут можлива диференціація допомоги: рисунок без позначень, рисунок із позначеннями, з виконаною додатковою побудовою або рекомендацією до її виконання тощо);
- пропонування алгоритму розв’язання (виконання);

- наведення аналогічної задачі, розв’язаної раніше;
- пропозиції виконати допоміжне завдання, що наводить на розв’язання основного питання, задачі;
- указання причинно-наслідкових зв’язків, необхідних для виконання завдання;
- розчленування складної задачі на ряд елементарних;
- постановка навідних питань і т.ін.

Наприклад, під час розв’язування задачі (тестове завдання ІІІ рівня): «За деякий проміжок часу амеба може загинути з ймовірністю 1/4, вижити з ймовірністю 1/4 і поділитися на дві з ймовірністю 1/2. в наступний такий же проміжок часу з кожною амебою незалежно від її “походження” відбувається теж саме. З якою ймовірністю на кінець другого проміжку часу буде існувати 0 амеб?» середнім учням на картці біля умови задачі можна показати логічну схему для її розв’язування (рис.3.5), а слабшим учням можна запропонувати крім схеми ще й підказку (повне розв’язання всієї задачі див. §2. с.104-105):



На кінець другого проміжку часу буде існувати 0 амеб, якщо

- І амеба загинула,
- <u>або</u> спочатку вижила <u>і</u> потім загинула,
- <u>або</u> поділилася на дві <u>і</u> обидві вони загинули.

Рис. 3.5.

Аналізуючи результати тестування, ми акцентуємо увагу старшокласників на ключових моментах, типових помилках, які вони (учні) допустили, ще раз повторюючи вивчений матеріал. При цьому тести виконують навчаючу функцію.

Діагностико-коректуючий етап допомагає з’ясувати причини труднощів, які виникають в учня під час навчання, виявити прогалини у знаннях і вміннях та скоректувати його діяльність, спрямовану на усунення недоліків. На цьому етапі доцільно проводити тестування на зразок тренувальних вправ до ЗНО [3; 13] за трьома рівнями складності (базовий, основний, підвищений). Учні самостійно обирають рівень, на якому хочуть працювати, що теж має свій позитив. Зокрема, на початку заняття корисно давати короткі тести (на 10-15 хвилин), які виконують інформаційно-діагностуючу функцію. Це дає можливість вчителю, переходячи до наступної теми, отримувати інформацію про обсяг знань, умінь та навичок, засвоєних старшокласниками з попередньої теми.

Контролююче-оцінний етап дає можливість учневі з'ясувати рівень знань, навичок та умінь з даної теми, а вчителеві також і оцінити їх. На цьому етапі значну увагу слід приділити виробленню в учнів навичок самоконтролю. За допомогою кодоскопу треба вчити учнів знаходити й виправляти свої помилки, інколи (зокрема, під час проведення першого тестування на початку вивчення теорії ймовірності, див. додаток 6) можна пропонувати завдання типу "Оціни себе сам", "Оціни свого товариша" (робота в парах), але, безперечно, основна функція контролю належить вчителеві.

При складанні завдань для тестування слід дотримуватися ряд правил, необхідних для створення надійного, збалансованого інструменту оцінки успішності оволодіння певними навчальними темами, розділами. Так, необхідно проаналізувати зміст завдань з позиції рівного представлення в тесті різних навчальних тем, понять, дій, теорем тощо. Тест не повинен бути навантажений другорядними термінами, неістотними деталями з акцентом на механічну пам'ять, яка може бути задіяна, якщо в тест включати точні формулювання з підручника або фрагменти з нього. Завдання тесту повинні бути сформульовані чітко, стисло і недвозначно, щоб учні розуміли зміст запитання, задачі. Важливо прослідкувати, щоб одні завдання тесту не служили підказкою для відповіді на інші.

Варіанти відповідей на кожне завдання повинні підбиратися так, щоб виключалися можливості простої здогадки або відкидання свідомо невідповідної, неправильної відповіді.

Завдання для тестів повинні бути інформативними, перевіряти засвоєння одного або декількох понять, формули, визначення, теореми і т.д. При цьому тестові завдання не можуть бути дуже громіздкими. Варіантів відповідей на завдання повинно бути, по можливості, 4-5. Як невірні відповіді бажано використовувати найбільш типові помилки.

Систематичне застосування тестів передбачає і стимулює регулярну ґрунтовну підготовку до занять, сприяє підвищенню ефективності навчання, систематизації та узагальнення навчального матеріалу.

Література до розділу

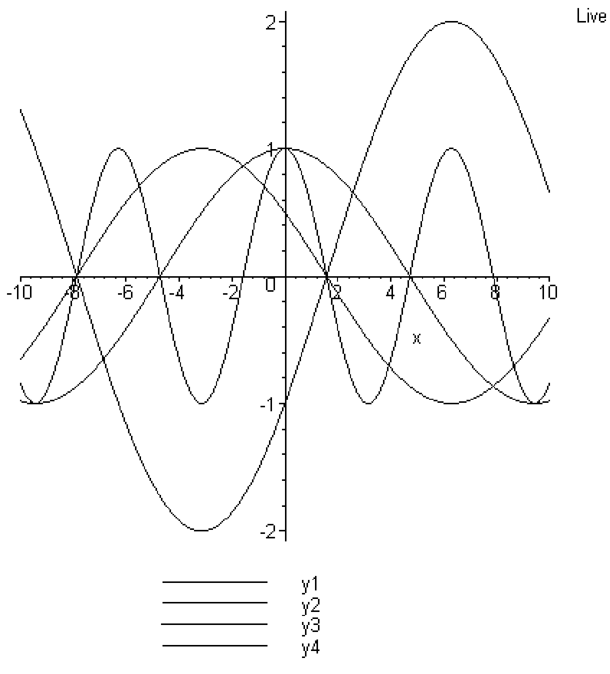
1. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. – М.: Высш. шк., 1986.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Алгебра і початки аналізу. 10 клас: Пробний підручник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 456 с.
3. Бродський Я.С. Готуємось до підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання. Алгебра та початки аналізу. 11 клас / Я.С.Бродський, О.М.Афанасьєва, О.Л.Павлов, А.К.Сліпенко. – Харків: Вид. група «Основа», 2008. – 102 с.
4. Бродський Я.С. Комбінаторика без формул. Знайомство з імовірністю та статистикою. – Х.: Вид. група "Основа", 2004. – 112 с.– (Б-ка ж. "Математика в школах України"; Вип.8(20)).
5. Волков Ю.І., Войналович Н.М. Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. – Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 1999. – 173 с.
6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для студентов вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 405 с.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988.
9. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1976. – 168 с.
10. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студ. втузов. В 2-х ч. Ч.ІІ. – М.: Высш. шк.., 1986. – 415 с.
11. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлинська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика. З елементами інформаційної технології. – К.: Вища шк., 1995.
12. Жалдак М.І. Початки теорії ймовірностей. – К.: Рад. шк., 1978. – 143 с.
13. Захарійченко Ю.О. Математика: зб. тест. завдань для підготов. до зовніш. незалеж. оцінювання / Ю.О.Захарійченко, О.В.Школьний. – К.: Генеза, 2009. – 104 с.

14. Кармелюк Г.І. Теорія ймовірностей та математична статистика. Посібник з розв’язування задач: Навчальний посібник. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 576 с.
15. Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. – Кам’янець–Подільський: Абетка, 2001. – 220 с.
16. Олійник Л. Алгебраїчний тренажер (запитання, відповіді, зразки розв’язання вправ). Множини, комбінаторика, ймовірність, статистика. 11 клас. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2008. – 96 с.
17. Павлова Л., Дітчук Р. Елементи комбінаторики та стохастики. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2005. – 160 с.
18. Програма з математики для 5-12 класів загальноосвітньої школи (рівень стандарту). – Київ-Ірпень, Перун, 2005.
19. Програма з математики для 10-11 профільних класів природничого напрямку (авт. Я.С.Бродський, О.Л.Павлов, А.К.Сліпенко, О.М.Афанасьєва). – Київ: Навчальна книга, 2002.
20. Ріжняк Р.Я., Малихіна Л.І. Організація самостійної роботи учнів з математики на уроках та в позаурочний час: Посібник для спецкурсу. – Кіровоград: КДПУ, 2001. – 200 с.
21. Слєпкань З.І., Грохольська А.В., Волянська О.Є. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. Навчальний посібник для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 240 с.
22. Слєпкань З.І. Елементи комбінаторики. Початки теорії ймовірностей / В кн. Математика. Посібник для факультативних занять у 10 кл. За ред. проф. І.Є. Шиманського, – К.: Рад. школа, 1970.
23. Слєпкань З.І., Соколовська І.С. Методика вивчення елементів комбінаторики, початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в загальноосвітніх навчальних закладах. – Математика. – №29-33 (281-282), серпень 2004. – 112 с.
24. Черняк О.І., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей та математична статистика: Збірник задач: Навч. посіб. – К.: Знання, КОО, 2002. – 199 с.
25. Шкіль М.І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Проб. підруч. для 10-11 кл. серед. шк. / М.І. Шкіль, З.І. Слєпкань, О.С. Дубинчук. – К.: Зодіак-ЕКО, 1995. – 60 с.

Ольга Авраменко, Світлана Шлянчак

Розділ IV.

Засоби універсальної математичної системи Maple у математиці



В 1980 році група дослідників університету Waterloo зайнялась проблемою створення комп'ютерної системи, ефективної в розв'язуванні алгебраїчних задач і досить простою для того, щоб її могли використовувати не тільки математики та інженери, але й студенти. До грудня того ж року стало зрозуміло, що подібний продукт – реальність, і для нього почали підбирати назву. Як відомо, Канада – країна кленів, а її символ – кленовий лист. Можливо, саме тому програма отримала саме „канадську" назву Maple, що в перекладі означає клен та є скороченням від Mathematical Application.

Не дивлячись на зусилля розробників, які демонстрували починаючи з 1982 року можливості продукту на всіх можливих конференціях по всьому світу, попит на Maple спостерігався в основному серед окремих спеціалістів – про масове визнання мова не йшла. Та Maple постійно вдосконалювався. Помітним етапом в розвитку Maple стало створення графічного інтерфейсу користувача. Саме з цього часу користувачами Maple стали студенти та аспіранти, причому не тільки фізико-математичних спеціальностей.

Maple – система для розв'язування математичних задач. І тепер головною проблемою являється залучення якомога більшої кількості користувачів. Для ефективного використання математичного пакету Maple, необхідно з ним познайомитись поближче – потрібно зрозуміти базову концепцію та засвоїти основні команди.

Математичний пакет Maple — інтелектуальний лідер і зразок серед інших класів математичних пакетів, що визначають розвиток комп'ютерної математики. Комп'ютерна алгебра Maple ввійшла складовою частиною в ряд сучасних пакетів, його набори інструментів унікальні. Сам пакет постійно вдосконалюється, розвиваючи апарат і поповнюючи ресурси. Пакет Maple — могутня і добре організована система, надійна і проста в роботі. Освоєння навіть частини його можливостей дасть безперечний ефект, а у міру накопичення досвіду прийде справжня ефективність від взаємодії з ним. Ще однією перевагою пакету є незмінність набору основних команд і конструкцій мови при появі нових версій.

Впроваджуючи комп'ютерно-орієнтовані системи навчання (КОСН) викладачі часто забувають про один із серйозних недоліків деяких КОСН – піратське (з порушенням законів) поширення неліцензійного програмного забезпечення без документації. Однією з альтернатив вирішення такого недоліку є поповнення програмної бази вільно розповсюдженим програмним забезпеченням (ПЗ). Одним із зразків вільного ПЗ є система аналітичних обчислень Maxima, яка має зручний і простий інтерфейс.

В даному ж розділі будуть наведені приклади розв'язування математичних задач за допомогою системи символьних обчислень Maple. Наголошуємо, що ми в жодному разі не намагаємось продемонструвати переваги або недоліки однієї системи над іншою, а прагнемо показати як зосередити увагу студентів на поняттях при обчисленні, звільнивши їх від громіздких перетворень. Наголошуємо на важливості теоретичних знань студентів для глибокого оволодіння практикою.

Вважаємо, що студентам можна запропонувати систему Maxima, яка має досить зручний інтерфейс. Хоча в плані математичних можливостей вона, на нашу думку, дещо «програє» математичному пакету Maple. Тому, ознайомлюючи студентів ВНЗ з комп’ютерними методами розв’язування математичних задач більш доцільно обрати пакет Maple (якщо цьому дозволяють можливості), в якому можна показати більше технічних прийомів. У студентів-математиків, які оволодіють прийомами роботи з математичним пакетом Maple не виникне труднощів при необхідності переходу до роботи в системі Maxima.

Структура вікна та основи роботи в системі Maple

Для того, щоб запустити Maple, необхідно виконати команду Пуск → Программы →Maple або двічі натиснути лівою кнопкою миші на ярлику Maple, якщо він розташований на Робочому столі.

Maple являє собою типове вікно *Windows*, яке складається з *Рядка назви*, *Рядка меню*, *Панелі інструментів*, *Робочого поля та Рядка стану*, а також *Лінійки і Смуг прокручування*.

Вигляд вікна зображено на рис. 1.

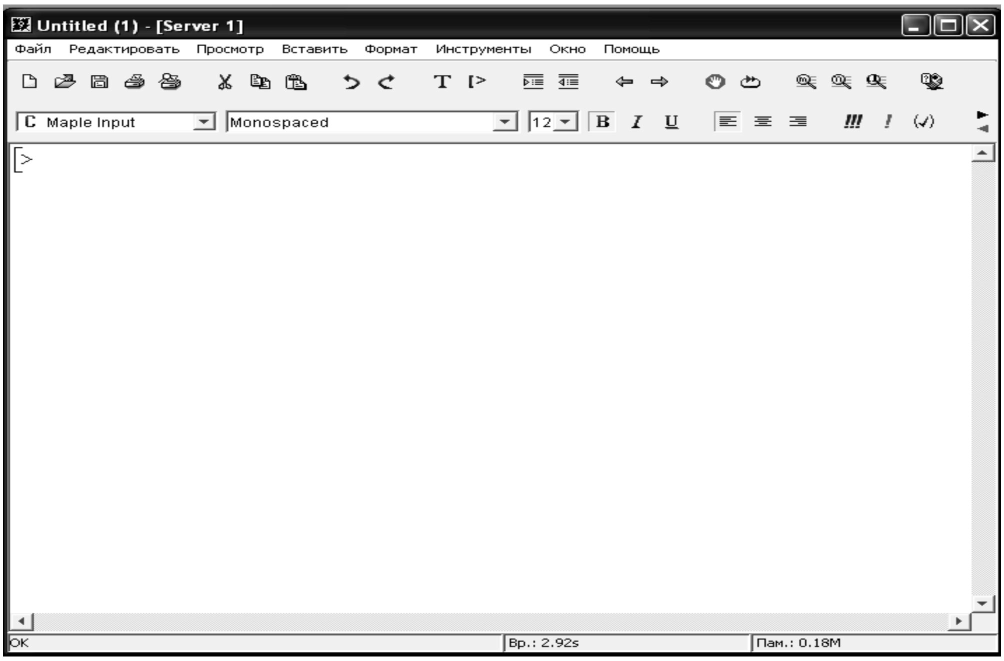


Рис.1 Вікно пакету символьних обчислень Maple

Перерахуємо пункти рядка меню:

Файл – містить стандартний набір команд роботи з файлами, наприклад: відкрити файл, створити новий файл і т.д.

Редактировать – містить стандартний набір команд для редагування текста, наприклад: копіювання, вилучення, відміна команди і т.д.

Просмотр – містить стандартний набір команд, що управляють структурою вікна Maple.

Вставить – служить для вставки полів різних типів: математичних, текстових рядків, секцій та гіперпосилань, графічних дво- та тримірних зображень.

Формат – містить команди оформлення документа, наприклад: встановлення типу, розміру та стиля шрифта.

Инструменты –служить для перевірки орфографії, конвертування даних та ін.

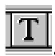
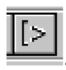
Окно – служить для переходу із одного робочого листа в інший.

Помощь – містить детальну довідкову інформацію про роботу в Maple.

Робота в Maple проходить в режимі сесії – користувач вводить команди, вирази або процедури, які сприймаються і обробляються Maple. В кінці кожної команди ставиться або крапка з комою «;» (під відповідним виразом буде виведено результат виконання команди або повідомлення про помилку), або двокрапка «:» (результат не виводиться).

Робоче поле поділяється на три частини:

1) область введення – складається з командних рядків. Кожен командний рядок починається з символа «>»;
2) область виведення – містить результати обробки введених команд в вигляді аналітичних виразів, графічних об’єктів або повідомлень про помилку;
3) область текстових коментарів – містить довільну текстову інформацію, яка може пояснити процедури, що обробляються. Текстові рядки не сприймаються Maple та не обробляються.

Для перемикання командного рядка в текстовий і навпаки використовуються кнопки на панелі інструментів , .

Для виведення інформації на робочий лист можна використовувати оператор **printf**.

<u>Здійснення арифметичних операцій, числа, константи</u>

Для здійснення арифметичних операцій використовуються такі знаки:

+ - додавання;

– - віднімання;

* - множення;

/ - ділення;

^ - піднесення до степеня;

! – факторіал.

Знаки порівняння: **<, >, >=,<=, <>, =.**

Основні математичні константи:

Pi – число π;

I – уявна одиниця *i*;

infinity – нескінченність;

true, **false** – логічні константи, що позначають істинність, хибність висловлювання.

Числа в Maple бувають дійсні (real) та комплексні (complex). Комплексне число записується в алгебраїчній формі $z=x+iy$, в командному рядку повинен бути такий запис команди:

> z:=x+I*y;

Дійсні числа поділяються на цілі і раціональні. Цілі числа (integer) виражаються цифрами в десятковій формі запису. Раціональні числа можуть бути представлені в 3-х видах:

1) як раціональний дріб з використанням оператора ділення, наприклад:

> **21/58;**

$$\frac{21}{58}$$

2) з плаваючою комою (float), наприклад: **2.3;**

3) в показниковій формі запису, наприклад: **1,207*10^(-17)**, що означає $1{,}207\ 10^{-17}$.

Для того, щоб отримати раціональне число не в точній формі, а у вигляді наближеного значення (числа з плаваючою комою), слід дописати до цілої частини числа .0. Наприклад:

> **21/58;**

$$\frac{21}{58}$$

> 21/58.0;

$$0.3620689655$$

В Maple можна записувати літери грецького алфавіту, для цього в командному рядку набирається назва грецької літери. Наприклад, літера α отримається при наборі **alpha**.

Правила набору команд

Для роботи в пакеті символьних обчислень Maple необхідно дотримуватись певних правил при наборі команд:

1. Maple розпізнає регістр введених символів, тобто великі і малі літери система сприймає по-різному.

Наприклад, команда **> int(x^2,x);** виводить результат знаходження вказаного інтегралу, не слід її записувати в такому вигляді: **>INT(x^2,x);**, оскільки в області виведення вихідна команда буде переписана, що свідчить про не існування такої команди на даний момент. Іноді можна отримати незрозумілі результати просто із-за неуважності під час роботи, наприклад результатом команди > **int(x^2,X);** буде відповідь x^2X, що неправильно.

2. При введенні довгої команди, яка не поміщається в один рядок, Maple

автоматично переходить на наступний, сприймаючи команду як одне ціле.

3. В одному рядку можна вводити декілька команд.
4. Ознакою завершення кожної команди є символ двокрапка «:» або крапка з комо. «;».

Наприклад,

> x := 5:

> X := x+1:

> x^2;

25

У даному прикладі використовується оператор присвоєння «:=», який результат обчислення в правій частині присвоює змінній в лівій частині. З прикладу видно, що опечатка в другому операторі призвела до того, що змінна *x* не збільшилась на одиницю.

5. Для розташування команд по одній на рядок, а Maple обробляла їх як єдину операцію, необхідно після введення команди замість <Enter> натиснути комбінацію клавіш <Shift>+<Enter>.
6. Для виконання команди клавіша <Enter> може натискатись не обов'язково в кінці області введення, але і в будь-якому місці цієї області введення.
7. Посилання на результат виконання попередньої операції можна виконувати за допомогою символа % (процент). Для посилання на результат виконання «передпопередньої» і «передпередпопередньої» команди використовуються символи %% і %%% відповідно.
8. Коментар в Maple починається з символа # (решітка).
9. Роботу в математичному пакеті краще починати з команди **restart;**, яка скасовує всі попередні присвоювання.

Щоб виконати всі команди заново в тому порядку, в якому вони введені в систему, замість того, щоб на кожній команді натискати **<Enter>**, можна використати команду **Редактировать→Выполнить→Выбор**, виділивши перед цим потрібний фрагмент для виконання.

Для запису текстової інформації можна перейти в текстовий режим.

<u>Зручне введення найбільш вживаних команд</u>

В Maple є засоби, якими користуються для більш зручного введення команд, які часто застосовуються. Їх називають **палітрами**. Версії Maple змінюються, доступ до різних видів палітр збільшується, тому наведемо основні з них.

Види палітр

1. Палітра введення символів.
2. Палітра введення виразів (інтегралів, границь та ін.).
3. Палітра введення матриць (розмір не більше 4х4).
4. Палітра введення векторів (не більше 5-ти елементів).

Для застосування палітри необхідно виконати таку команду: **Просмотр →Палитра** → вибрати потрібний вид палітри (рис.2).

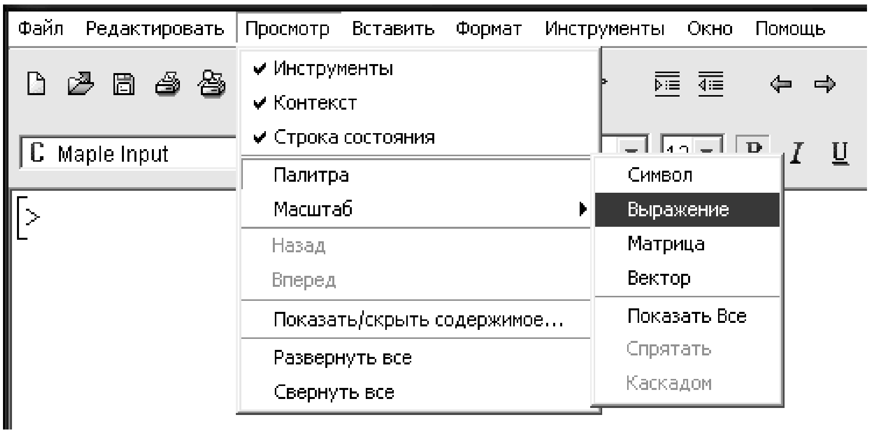


Рис. 2. Вибір виду палітри

Після цього відкриється вікно, в якому обирається відповідна палітра обраного користувачем виду. На рис. 3 показано палітру введення виразів:

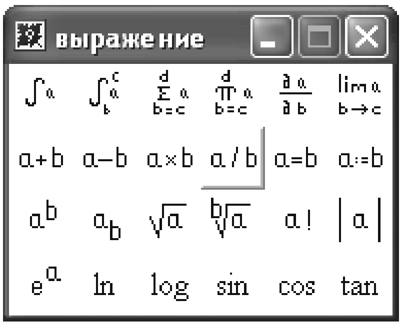


Рис. 3. Вікно палітри введення виразів

Робота з допомогою

Зручність організованої допомоги в середовищі Maple дає можливість користувачу знайти необхідну інформацію. Для виклику допоги треба відкрити пункт меню **Помощь** або натиснути клавішу **F1**. Зручність користування допомогою або так званою довідковою системою полягає в чіткій структурі, яка організована у вигляді гіпертекстового документа.

Цікавим та цінним є те, що в довідковій системі до кожної команди наводяться приклади застосування відповідної команди, що дозволяє використовувати Maple тим, хто не досконало знає англійську мову. Ці приклади можна копіювати в буфер обміну та застосовувати до розв'язування прикладів.

Для того, щоб отримати допомогу до конкретної команди, треба встановити курсор на команді та відкрити пункт меню **Помощь** або обрати рядок з назвою команди та натиснути комбінацію клавіш <Ctrl>+<F1>.

§ 1. Векторна алгебра

Основна частина команд для розв'язування задач лінійної алгебри міститься в бібліотеці **linalg**. Тому перед розв'язуванням задач з матрицями та векторами слід підключити цю бібліотеку командою **with(linalg);**.

Укажемо різні способи задання векторів.

I спосіб

Для задання векторів в Maple використовується команда **vector([x1,x2,...,xn])**, де в квадратних дужках через кому вказуються координати вектора.

II спосіб

Також можна задати вектор, використовуючи команду **array(1..n,[x1,x2,...,xn])**; тобто вказати розмірність масиву та перерахувати його елементи в квадратних дужках.

Координату вже заданого вектора **x** можна отримати в рядку виведення, якщо ввести команду **a[n]** - де **a** - вектор, а **n** - номер координати.

Приклад 1. Задати вектори $\bar{a}=(2,3)$, $\bar{b}=(1,5)$.

Хід розв'язування

I спосіб

```
> with(linalg):
```

```
a:=vector([2,3]);b:=vector([1,5]);
```

$$a := [2, 3]$$
$$b := [1, 5]$$

II спосіб

```
> a:=array(1..2,[2,3]);b:=array(1..2,[1,5]);
```

$$a := [2, 3]$$
$$b := [1, 5]$$

```
> a[1]; b[2];
```

$$2$$
$$5$$

Додавання векторів

Знаходження суми двох векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ можна здійснити за допомогою таких команд: **evalm(a+b);**, **matadd(a,b);.**

За допомогою команди **add** можна обчислити лінійну комбінацію векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$: **l a+m b**, де **l**, **m** - скалярні величини, за умови використання формату: **matadd(a,b,l,m);**.

Обчислення скалярного та векторного добутків

Скалярний добуток двох векторів можна обчислити за допомогою команди **dotprod(a,b)**. Векторний добуток двох векторів обчислюється командою **crossprod(a,b)**. Для знаходження кута між двома векторами використовується команда **angle(a,b)**.

Якщо задана система **n** векторів, то використовуючи команду **basis([a1,a2, ..,an])** можна знайти базис цієї системи.

Щоб знайти норму (довжину) вектора можна використати команду **norm(a,2)**.

Приклад 2. На площині задано два вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Довести, що ці вектори утворюють базис площини і знайти координати вектора $\bar{x} = (3,1)$ у базисі $\{\bar{a}, \bar{b}\}$.

Хід розв'язування

Перевіримо координати векторів на пропорційність:

```
> a[1]/b[1];a[2]/b[2];
```

$$2$$
$$\frac{3}{5}$$

Оскільки координати векторів не пропорційні, то вектори не колінеарні, а тому утворюють базис площини. Кожен вектор однозначно зображається у вигляді лінійної комбінації базисних векторів, а тому і вектор **x** може бути однозначно виражений через вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$.

```
> x:=vector([3,1]);
```

$$x := [3, 1]$$

```
> matadd(a,b,alpha,beta);
```

$$[2\alpha+\beta, 3\alpha+5\beta]$$

```
> eq:={x[1]=%[1],x[2]=%[2]};
```

$$eq := \{3 = 2\alpha+\beta, 1 = 3\alpha+5\beta\}$$

```
> solve(eq);
```

$$\{\alpha = 2, \beta = -1\}$$

Виконаємо перевірку:

```
> subs({alpha=2,beta=-1},eq);
```

$$\{3 = 3, 1 = 1\}$$

Нагадаємо, що команда **solve** розв'язує вказане рівняння. Команда **subs** виконує підстановку знайдених коренів в систему рівнянь **eq**.

Приклад 3. Обчислити скалярний добуток та кут між векторами $\bar{x}$ та $\bar{y}$, які побудовані за одиничними взаємно-ортогональними векторами $\bar{p}$ і $\bar{q}$, $\bar{x}=-8\bar{u}-3\bar{v},\ \bar{y}=11\bar{u}-5\bar{v}.$.

Хід розв'язування

```
> x:=vector([-8,-3]);
  y:=vector([11,-5]);
  dotprod(x,y);
  phi:=angle(x,y);
```

$$x := [-8, -3]$$

$$y := [11, -5]$$

$$-73$$

$$\phi := \pi - \arccos\left(\frac{1}{146}\sqrt{73}\sqrt{146}\right)$$

```
> radsimp(%);
```

$$\frac{3}{4}\pi$$

```
> convert(%, units, radians,degrees);
```

$$135$$

Команда **radsimp** виконує спрощення виразу з ірраціональностями, а **convert** - здійснює перетворення вказаних в дужках одиниць вимірювання.

Приклад 4. Чи компланарні три вектори $\bar{x}=(-2,3,1),\ \bar{y}=(-3,0,6),\ \bar{z}=(1,3,7)$?

Хід розв'язування

```
> x:=vector([-2,3,1]); y:=vector([-3,0,6]);
  z:=vector([1,3,7]);
```

$$x := [-2, 3, 1]$$

$$y := [-3, 0, 6]$$

$$z := [1, 3, 7]$$

Відомо, що умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю мішаного добутку цих векторів. Мішаний добуток трьох векторів в ортонормованому базисі обчислюється як визначник, складений із координат цих векторів.

```
> Delta:=<x1,x2,x3>;
```

$$\Delta := \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> det(%);
```

$$108$$

Визначник не дорівнює нулю, значить вектори не компланарні.

§ 2. Матриці та визначники

Обчислення визначників

Нагадаємо, основна частина команд для розв'язування задач лінійної алгебри міститься в бібліотеці **linalg**. Тому перед розв'язуванням задач з матрицями та векторами слід підключити вказану бібліотеку командою **with(linalg):**.

Визначник можна описати різними способами.

Способи задання визначників

I спосіб **<<a11,a21,...,an1>|<a12,a22,...an2>|...<a1n,a2n,...ann>>;**

II спосіб **<<a11|a12|...a1n>,<a21|a22|...an2>,...<an1|an2|...ann>>**;.

Таким чином, в першому випадку елементи вводяться по стовпцям, а в другому - по рядкам. Також можна задати визначник, використовуючи команду **matrix**, з якою ознайомимося більш детально нижче.

Приклад 1. Задати визначник $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

Хід розв'язування

I спосіб.

```
> with(linalg):
 Delta:=<<-3,2,4,3>|<2,-2,0,1>|<1,1,-1,-
1>|<0,4,2,4>>;
```

$$\Delta := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

II спосіб.

```
> Delta:=<<-3|2|1|0>,<2|-2|1|4>,<4|0|-1|2>,<3|1|-
1|4>>;
```

$$\Delta := \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Визначник обчислюється за допомогою команди **det(A);**. Також є команди для знаходження мінорів. Команда **minor(A,i,j);** виводить матрицю, отриману з вихідної матриці **A** викреслюванням **i**-го рядка та **j**-го стовпця. Мінор M_{ij} елемента a_{ij} матриці **A** можна обчислити командою **det(minor(A,i,j))**.

Приклад 2. Знайти мінор M_{12} та обчислити. Знайти алгебраїчне доповнення елементу a_{12}.

Хід розв'язування

Знайдемо мінор M_{12}, тобто визначник, який отримується викреслюванням 1-го рядка і 2-го стовпця:

```
> minor(Delta,1,2);
```

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Тепер обчислимо знайдений мінор:

```
> M12:=det(%);
```

$$M12 := -18$$

Також мінор можна обчислити за допомогою команди **Minor**, підключивши попередньо пакет **Student[LinearAlgebra]** командою **with(Student[LinearAlgebra]):**.

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
Minor(Delta,1,2);
```

$$-18$$

Знайдемо алгебраїчне доповнення елементу a_{12}:

```
> A12:=(-1)^(1+2)*M12;
```

$$A12 := 18$$

Приклад 3. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ та розкласти за заданими умовами: а) за елементами першого рядка; б) за елементами другого стовпця; отримати нулі в першому рядку.

Хід розв'язування

Спочатку обчислимо заданий визначник однією командою:

```
> det(Delta);
```

$$38$$

Тепер будемо розкладати визначник за заданими умовами та обчислювати його:

а) розкласти визначник за елементами 1-го рядка

```
> (-1)^(1+1)*Delta[1,1]*minor(Delta,1,1)+
  (-1)^(1+2)*Delta[1,2]*minor(Delta,1,2)+
  (-1)^(1+3)*minor(Delta,1,3)+
  (-1)^(1+4)*Delta[1,4]*minor(Delta,1,4);
```

$$-3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Для того, щоб обчислити визначник, скопіюємо формулу розкладу та застосуємо оператор **det** до кожного мінору.

```
> (-1)^(1+1)*Delta[1,1]*det(minor(Delta,1,1))+
  (-1)^(1+2)*Delta[1,2]*det(minor(Delta,1,2))+
  (-1)^(1+3)*det(minor(Delta,1,3))+
  (-1)^(1+4)*Delta[1,4]*det(minor(Delta,1,4));
```

$$38$$

Можна було б використати команду **Minor**, підключивши попередньо пакет **Student[LinearAlgebra]**.

б) розкласти визначник за елементами 2-го стовпця

```
> (-1)^(1+2)*Delta[1,2]*minor(Delta,1,2)+(-
1)^(2+2)*Delta[2,2]*minor(Delta,2,2)+(-
1)^(3+2)*Delta[3,2]*minor(Delta,3,2)+(-
1)^(4+2)*Delta[4,2]*minor(Delta,4,2);
```

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Самостійно перевірте, що результат дорівнює 38.

в) отримати нулі в 1-му рядку

```
> Delta;
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Поділимо 3-ій стовпчин на 3 (помножимо 3-ій стовпчик на $\frac{1}{3}$):

```
> mulcol(Delta,3,3);
```

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Додамо до 3-го стовпця 1-ий:

```
> addcol(%,3,1);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Помножимо 3-ій стовпчик на число 2:

```
> mulcol(%,3,1/3);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> mulcol(%,3,-2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> addcol(%,3,2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> mulcol(%,3,1/(-2));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> (-1)^(1+3)*minor(%,1,3);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> det(%);
```

$$38$$

Матриці та операції над ними

Перед розв'язуванням задач з матрицями та векторами виконуємо команду **with(linalg):**.

Для опису матриці в Maple можна використовувати команду:

matrix(n, m, [[a11,a12,…,a1n], [a21,a22,…,a2m],…, [an1,an2,…,anm]]), де **n** - число рядків, **m** – число стовбців матриці. Ці числа задавати необов'язково, досить перерахувати елементи матриці по порядку в квадратних дужках через кому.

Діагональну матрицю в Maple можна отримати командою **diag**. Також матрицю можна заповнювати випадковими числами, використовуючи команду **RandomMatrix(n);** підключивши попередньо пакет **Student[LinearAlgebra]** командою **with(Student[LinearAlgebra]):**.

Число рядків матриці А можна визначити за допомогою команди **rowdim(A)**, а число стовбців – за допомогою команди **coldim(A)**.

Приклад 4. Описати матриці А та В: $A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Отримати матрицю заповнену випадковими числами та діагональну матрицю. Визначити число рядків матриці А.

Хід розв’язування

Підключаємо бібліотеку **linalg.**

```
> with(linalg):
> A:=matrix([[-4,0,1],[2,-1,3],[3,2,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[1,2,-3],[2,0,1],[-2,1,3]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Отримаємо матрицю, заповнену випадковими числами:

```
> with(Student[LinearAlgebra]):
> RandomMatrix(3);
```

$$\begin{bmatrix} 97 & 55 & 13 \\ -82 & 68 & -65 \\ -66 & 26 & 5 \end{bmatrix}$$

Отримаємо діагональну матрицю:

```
> J:=diag(1,2,3);
```

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Визначимо число рядків матриці A:

```
> rowdim(A);
```

$$3$$

Матриці можна вводити через організацію діалогу комп’ютера з користувачем, таке введення матриці називають інтерактивним. Для введення матриці в інтерактивному режимі, треба спочатку визначити розмірність масиву командою **array**, а потім застосувати команду **entermatrix**.

Інтерактивне введення матриці має такий вигляд:

```
> with(linalg):
> A:=array(1..3,1..3);
```

A := array(1 .. 3, 1 .. 3, [ ])

```
> entermatrix(A);
```

enter element 1,1 > **-4;**
enter element 1,2 > **0;**
enter element 1,3 > **1;**
enter element 2,1 > **2;**
enter element 2,2 > **-1;**
enter element 2,3 > **3;**
enter element 3,1 > **3;**
enter element 3,2 > **2;**
enter element 3,3 > **2;**

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Арифметичні операції над матрицями

Сума двох матриць однакової розмірності (аналогічно сума векторів) знаходиться за допомогою команд: **evalm(A+B)** або **matadd(A,B)**.

Добуток двох матриць можна знайти, використовуючи команди **evalm(A&*B);** або **multiply(A,B);**.

За допомогою команди **evalm** також можна додавати до матриці число та множити матрицю на число.

Наведемо приклади дій над матрицями.

Приклад 5. Знайти добуток двох матриць А та В.

Хід розв'язування

І спосіб

```
> evalm(A&*B);
```

$$\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

ІІ спосіб

```
> multiply(A,B);
```

$$\begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Знаходження оберненої та транспонованої матриці

Обернену матрицю $A_{обр}$, таку що $A_{обр} \cdot A = A \cdot A_{обр} = E$, де E - одинична матриця, можна обчислити використовуючи команду **evalm(1/A);** або **inverse(A);**.

Нагадаємо, щоб отримати транспоновану матрицю (A^T) треба поміняти місцями рядки та стовпці матриці A. Транспоновану матрицю A^T можна отримати за допомогою команди **transpose(A)**.

Приклад 6. Знайти обернену до матриці А.

Хід розв'язування

Знайдемо обернену матрицю до матриці А, але спочатку перевіримо чи матриця А невироджена (знайдемо визначник і перевіримо на нерівність нулю).

I спосіб

```
> det(A);
```

$$39$$

```
> A_obr:=inverse(A);
```

$$A\_obr := \begin{bmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}$$

II спосіб

```
> A_obr:=evalm(1/A);
```

$$A\_obr := \begin{bmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}$$

Перевіримо, чи отримана матриця є оберненою.

```
> multiply(A_obr,A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(A,A_obr);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо обернену матрицю знайомим з алгебри способом. Відомо, що для А існує єдина обернена матриця **А_обр**, яка визначається за формулою:

$$A\_obr = \frac{A^*}{|A|}, - A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця **А*** називається приєднаною, її елементами є алгебраїчні доповнення транспонованої матриці. Команда **minor(A,i,j);** виводить матрицю, отриману з вихідної матриці **А** викреслюванням **i**-го рядка та **j**-го стовпця. Мінор M_{ij} елемента a_{ij} матриці **А** можна обчислити командою **det(minor(A,i,j))**.

Наведемо проміжні дії:

```
> (minor(A,1,1));
```

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> A11:=det(%);
  A12:=-det(minor(A,1,2));A13:=det(minor(A,1,3));
```

$$A11 := -8$$
$$A12 := 5$$
$$A13 := 7$$

```
> A21:=-det(minor(A,2,1));
  A22:=det(minor(A,2,2));
  A23:=-det(minor(A,2,3));
```

$$A21 := 2$$
$$A22 := -11$$
$$A23 := 8$$

```
> A31:=det(minor(A,3,1));
  A32:=-det(minor(A,3,2));
  A33:=det(minor(A,3,3));
```

$$A31 := 1$$
$$A32 := 14$$
$$A33 := 4$$

```
> 
matrix([[A11,A12,A13],[A21,A22,A23],[A31,A32,A33]]);
```

$$\begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 2 & -11 & 8 \\ 1 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> A_trp:=transpose(%);
```

$$A\_trp := \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> A_obr2:=evalm((1/det(A))*A_trp);
```

$$A\_obr2 := \begin{bmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}$$

```
> A_obr()=A_obr2();
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix}$$

Для знаходження власних значень матриці A використовується команда **eigenvalues(A)**.

Для знаходження власних векторів матриці A використовується команда **eigenvectors(A)**. В результаті виконання цієї команди будуть отримані власні значення, їх кратність і відповідні власні вектори.

Приклад 7. Знайти власні значення та власні вектори, якщо

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Хід розв'язування

```
> restart:
  with(linalg):
  A:=matrix([[3,-1,1],[-1,5,-1],[1,-1,3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$[6, 1, \{[1, -2, 1]\}], [2, 1, \{[-1, 0, 1]\}], [3, 1, \{[1, 1, 1]\}]$$

В рядку виведення перераховані в квадратних дужках власне значення, його кратність і відповідний йому власний вектор в фігурних дужках, потім наступні набори даних.

§ 3. Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Види матриць

Перетворити матрицю А до нормальної форми Жордана можна командою **jordan(A)**.

До трикутного виду матрицю А можна перетворити різними способами:

I спосіб. За допомогою команди **gausselim(A),** яка зводить матрицю А до трикутного виду методом Гаусса;

II спосіб. Використовуючи команду **ffgausselim(A)**, яка зводить матрицю А до трикутного виду методом Гаусса без ділення (ця команда рекомендується для роботи з символьними матрицями, оскільки не виконує нормування елементів та виключає можливі помилки, пов'язані з діленням на нуль);

III спосіб. Застосовуючи команду **gaussjord(A)**, яка зводить матрицю А до трикутного виду методом Гаусса-Жордана.

Характеристичну матрицю можна обчислити командою **charmat(A,lambda)**.

Приклад 1. Перетворити матрицю А способами, описаними вище.

Хід розв'язування

```
> with(linalg):
  A:=matrix([[3,5,-2],[1,-3,2],[6,7,-3]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

```
> ffgausselim(A);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

```
> gaussjord(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> charmat(A,lambda);
```

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & -5 & 2 \\ -1 & \lambda+3 & -2 \\ -6 & -7 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

Системи алгебраїчних рівнянь

Систему лінійних рівнянь можна розв'язати двома способами.

I спосіб. Стандартна команда **solve** розв'язує системи лінійних рівнянь, які записані в розгорнутому вигляді.

II спосіб. Команда **linsolve(A,b)** із пакета **linalg** знаходить розв'язки системи, аргументи цієї команди: A – матриця, b – вектор.

За допомогою команди **linsolve(A,b)** можна знайти розв'язки матричного рівняння *AX=B*, якщо в якості аргументів цієї команди вказати, відповідно матриці A і B.

Приклад 2. Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 2x-4y+z=3 \\ x-5y+3z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$.

Хід розв’язування

```
> eq:={2*x-4*y+z=3,x-5*y+3*z=-1,x-y+z=1};
  s:=solve(eq,{x,y,z});
```

$$eq := \{x-y+z=1,\ 2x-4y+z=3,\ x-5y+3z=-1\}$$

$$s := \{y=0,\ z=-1,\ x=2\}$$

Для знаходження конкретного розв'язку слід виконати підстановку конкретного значення однієї із змінних за допомогою команди **subs**.

Приклад 3. $\begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}.$

<u>Хід розв'язування</u>

методом комп'ютерних символьних обчислень

```
> A:=matrix(3,3,[2,-1,-3,3,4,-5,0,2,7]);
b:=vector([3,-8,17]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$b := [3, -8, 17]$$

```
> linsolve(A,b);
```

$$[5, -2, 3]$$

Приклад 4. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}.$

<u>Хід розв'язування</u>

```
>A:=matrix(5,4,[2,3,11,5,1,1,5,2,
3,3,9,5,2,1,3,2,1,1,3,4]);
  b:=vector([2,1,-2,-3,-3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b := [2, 1, -2, -3, -3]$$

```
> linsolve(A,b);
```

$$[-2, 0, 1, -1]$$

Приклад 5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$.

Хід розв'язування

```
> A:=matrix(3,4,[1,2,1,1,0,1,1,1,1,1,0,0]);
  b:=vector([5,3,2]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b := [5, 3, 2]$$

```
> rank(A);linsolve(A,b);
```

$$2$$

$$[-1 + \_t_1 + \_t_2, 3 - \_t_1 - \_t_2, \_t_1, \_t_2]$$

<u>*Пояснення:*</u> ранг матриці А рівний рангу матриці В: $rang(A) = rang(B) = 2 < n, \ (n = 4)$. Тому система сумісна і має нескінченну множину розв'язків, які залежать від $n - r = 4 - 2 = 2$ параметрів.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Хід розв'язування

Знайдемо визначник системи:

```
> A:=matrix(3,3,[2,-1,-3,3,4,-5,0,2,7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> Delta:=det(A);
```

$$\Delta := 79$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розвязок: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, де Δ_1 отримано із Δ заміною елементів першого стовпчика вільними членами. Δ_2, Δ_3 отримуються аналогічно.

```
> A1:=matrix(3,3,[3,-1,-3,-8,4,-5,17,2,7]);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=matrix(3,3,[2,3,-3,3,-8,-5,0,17,7]);
```

$$A2 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> A3:=matrix(3,3,[2,-1,3,3,4,-8,0,2,17]);
```

$$A3 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{bmatrix}$$

```
> Delta1:=det(A1);
```

$$\Delta 1 := 395$$

```
> Delta2:=det(A2);
```

$$\Delta 2 := -158$$

```
> Delta3:=det(A3);
```

$$\Delta 3 := 237$$

```
x1:=Delta1/Delta;
```

$$x1 := 5$$

```
x2:=Delta2/Delta;
```

$$x2 := -2$$

```
x3:=Delta3/Delta;
```

$$x3 := 3$$

§ 4. Поняття границі. Похідна і диференціал

Поняття границі

В Maple для деяких математичних операцій існують по дві команди: одна – прямого виконання, а інша – відкладеного. Нагадаємо, імена команд складаються з однакових літер за виключенням першої: команди прямого виконання починаються з рядкової літери, а команди відкладеного виконання – з прописної. Після звернення до команди відкладеного виконання математичні операції (інтеграл, границя, похідна і т.д.) виводяться на екран у вигляді стандартного аналітичного запису цієї операції. Обчислення в цьому випадку не відбувається. Команда прямого виконання одразу видає результат.

Команди для обчислення границь

1) *прямого виконання* – **limit(expr,x=a,par)**, де **expr** – вираз, границю якого слід знайти, **a** – значення точки, для якої обчислюється границя, **par** – необов'язковий параметр для пошуку односторонніх границь (**left** – зліва, **right** – справа) або опису типу змінних (real – дійсна, complex – комплексна).

2) *відкладеного виконання* – **Limit(expr,x=a,par)**, де параметри команди такі ж, як і в попередньому випадку.

Приклад 1. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)$.

Хід розв’язування

```
> Limit(sin(2*x)/x,x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2\,x)}{x} \right)$$

```
> limit(sin(2*x)/x,x=0);
```

$$2$$

Можна обчислювати по-іншому (використовуючи команду **value** - обчислити):

```
> Limit(sin(2*x)/x,x=0);
```

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(2\,x)}{x} \right)$$

```
> value(%);
```

$$2$$

За допомогою цих двох команд прийнято записувати математичні викладки у стандартному аналітичному вигляді:

```
> Limit(x*(Pi/2+arctan(x)),x=-infinity)=
limit(x*(Pi/2+arctan(x)), x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x \left(\frac{1}{2}\pi + \arctan(x) \right) \right) = -1$$

Односторонні границі обчислюються з указуванням параметрів: **left** – для знаходження границі зліва і **right** – справа.

```
> Limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,left)=
limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,left);
```

$$\lim_{x \to 0-} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{e}^{\left(\frac{1}{x} \right)}} \right) = 1$$

```
> Limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,right)=
limit(1/(1+exp(1/x)), x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{e}^{\left(\frac{1}{x} \right)}} \right) = 0$$

Похідна і диференціал

Для обчислення похідних в Maple є дві команди:

1) прямого виконання – **diff(f,x)**, де **f** – функція, яку слід продиференціювати, **x** – ім'я змінної по якій відбувається диференціювання.

2) відкладеного виконання – **Diff(f,x)**, де параметри команди такі ж, як і в попередній. Дія цієї команди зводиться до аналітичного запису похідної. Після виконання диференціювання, отриманий вираз бажано спростити. Для цього слід використовувати вже відомі команди **simplify**, **factor** або **expand**, в залежності від того, в якому вигляді треба отримати результат.

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = x^2$.

Хід розв’язування

```
> Diff(x^2,x)=diff(x^2,x);
```

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2\,x$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = \sin(x^2)$.

Хід розв’язування

```
> Diff(sin(x^2),x)=diff(sin(x^2),x);
```

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2) = 2\cos(x^2)\,x$$

Приклад 4. Знайти похідну 4-го порядку функції $f(x) = \cos^2(2x)$.

Хід розв’язування

Для знаходження похідних старших порядків, користуємось відомою командою **diff**, вказавши біля аргументу знак долара ($) і порядок.

```
> Diff(cos(2*x)^2,x$4)=diff(cos(2*x)^2,x$4);
```

$$\frac{d^4}{dx^4}(\cos(2\,x)^2) = -128\sin(2\,x)^2 + 128\cos(2\,x)^2$$

```
> simplify(%);
```

$$\frac{d^4}{dx^4}(\cos(2\,x)^2) = 256\cos(2\,x)^2 - 128$$

В даному випадку команду **simplify(%)** можна замінити на **combine(%)**.

Можна було знаходити послідовно похідні від функції:

```
> diff(cos(2*x)^2,x);
```

$$-4\cos(2\,x)\sin(2\,x)$$

```
> diff(%,x);
```

$$8\sin(2\,x)^2 - 8\cos(2\,x)^2$$

```
> diff(%,x);
```

$$64\cos(2x)\sin(2x)$$

```
> diff(%,x);
```

$$-128\sin(2x)^2+128\cos(2x)^2$$

```
> simplify(%,trig);
```

$$256\cos(2x)^2-128$$

Диференціальний оператор

Для визначення диференціального оператора використовується команда **D(f)**, де **f** - функція.

Наприклад,

```
> D(sin);
```

cos

Також можна обчислити похідну в точці:

```
> D(sin)(Pi);eval(%);
```

-1

-1

§ 5. Обчислення інтегралів та метод заміни змінної

Обчислення інтегралів виконується за допомогою команди **int**, яка працює без підключення додаткових пакетів.

Якщо ж нас цікавить не лише кінцевий результат, а й виконання проміжних дій інтегрування, то в такому випадку треба підключити пакет **student** командою **with(student)**. В пакеті **student** містяться підпрограми, які призначені для виконання розрахунків крок за кроком, таким чином прослідковуються послідовність проміжних дій, яка приводить до результату. Комп'ютерний метод розв'язування математичних задач, яким прослідковуються проміжні дії називатимемо ***методом комп'ютерних символьних обчислень***.

Якщо ж при виконанні проміжних дій виникає потреба в допомозі, то можна скористатися підказкою (команда **Hint**). В такому випадку слід підключити пакет **Student[Calculus1]** командою **with(Student[Calculus1])**.

Синтаксис, опції та приклади обчислення інтегралів, використовуючи команди **int** та **Int** можна знайти в допомозі .

Невизначений інтеграл

Після підключення пакету **student** інтеграл можна знайти за допомогою двох команд:

1) прямого виконання – **int(f, x)**, де f – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування;

2) відкладеного виконання – **Int(f, x)** – де параметри команди такі ж, як і в команді **int**. Команда **Int** видає на екран математичну форму запису інтеграла (символ), а **int(f, x) -** обчислює значення.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+\frac{3}{x^2-16}+\cos x\right)dx$.

Хід розв'язування

методом комп'ютерних символьних обчислень

Можна одразу отримати кінцевий результат:

```
> int(4/cos(x)^2+3/(x^2-16)+cos(x),x);
```

$$\frac{4\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{3}{8}\ln(x-4)-\frac{3}{8}\ln(x+4)+\sin(x)$$

Форма запису отриманого результату може не співпадати з результатом, отриманим класичним способом математичного аналізу.

Крім того, зверніть увагу, що результатом роботи команди **int** є одна із первісних, а не вся їх сукупність, оскільки у запису відсутня довільна стала С.

Проміжні дії нескладно отримати послідовним виконанням певних команд, підключивши попередньо пакет **student**.

```
> with(student):
  Int(4/cos(x)^2+3/(x^2-16)+cos(x),x);
  expand(%);
  value(%);
```

$$\int \frac{4}{\cos(x)^2}+\frac{3}{x^2-16}+\cos(x)\,dx$$

$$4\int \frac{1}{\cos(x)^2}dx+3\int \frac{1}{x^2-16}dx+\int \cos(x)\,dx$$

$$\frac{4\sin(x)}{\cos(x)}+\frac{3}{8}\ln(x-4)-\frac{3}{8}\ln(x+4)+\sin(x)$$

Як видно команда **Int** виводить на екран символьний запис шуканого інтегралу. Нагадаємо, знак % означає звернення до попереднього виразу. Команда **expand** розбиває попередній інтеграл на суму інтегралів, а команда **value** визначає значення попереднього виразу.

Визначений інтеграл

Для обчислення визначеного інтеграла в командах **int** та **Int** додаються межі інтегрування:

int(f(x), x=верхня межа..нижня межа).

Наприклад, щоб обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$ треба ввести команду:

```
> int(sin(x),x=0..Pi);
```

$$2$$

Метод заміни змінної

Інтегрування методом заміни змінної відбувається за допомогою команди **changevar** з пакету **student**.

Ця команда не обчислює кінцеву відповідь інтеграла, а лише виконує проміжні дії.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \left(\cos(3x+1)+5e^{2x}\right)dx$.

Хід розв'язування

методом комп'ютерних символьних обчислень

Кінцевий результат:

```
> int(cos(3*x+1)+5*exp(2*x),x);
```

$$\frac{1}{3}\sin(3\,x+1)+\frac{5}{2}\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

Проміжні дії можна отримати розбиттям інтегралу на два інтеграли, виконанням відповідної заміни змінної у кожному з інтегралів із наступним виконанням оберненої заміни у кожному з доданків.

```
> Int(cos(3*x+1)+5*exp(2*x),x);

Int(op(1,integrand(%)),x)+Int(op(2,integrand(%)),x);
  changevar(t1=3*x+1,op(1,%),t1)+
  changevar(t2=2*x,op(2,%),t2);
  value(%);
  changevar(t1=3*x+1,op(1,%),x)+
  changevar(t2=2*x,op(2,%),x);
```

$$\int \cos(3\,x+1)+5\,\mathbf{e}^{(2\,x)}\,dx$$

$$\int \cos(3\,x+1)\,dx + \int 5\,\mathbf{e}^{(2\,x)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{3}\cos(t1)\,dt1 + \int \frac{5}{2}\mathbf{e}^{t2}\,dt2$$

$$\frac{1}{3}\sin(t1) + \frac{5}{2}\mathbf{e}^{t2}$$

$$\frac{1}{3}\sin(3\,x+1) + \frac{5}{2}\mathbf{e}^{(2\,x)}$$

Використана команда **integrand** визначає підінтегральну функцію, команда **op** виявляє доданок з указаним номером, а команда **changevar** робить задану заміну змінної під інтегралом та відповідну обернену заміну в отриманій первісній.

Зверніть увагу, що в даному випадку ми були вимушені розбивати інтеграл на суму інтегралів не командою **expand**, а майже вручну - використанням вкладених одна в одну команд **Int**, **op** та **integrand**. Це пояснюється тим, що в цьому прикладі команда **expand** призводить не до спрощення, а до ускладнення процесу інтегрування.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int\left(\frac{2}{4+9x^2}-\frac{5}{\cos^2 2x}\right)dx$.

Хід розв'язування

методом комп'ютерних символьних обчислень

Отримаємо кінцевий розв'язок:

```
> int(2/(4+9*x^2)-5/cos(2*x)^2,x);
```

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{5\sin(2\,x)}{2\cos(2\,x)}$$

Проміжні дії можна отримати таким способом

```
>Int(2/(4+9*x^2)-5/cos(2*x)^2,x);
 expand(%,cos);

changevar(t=3*x,op(1,%),t)+changevar(t=2*x,op(2,%),t)
;
 simplify(%);
 value(%);
changevar(t=3*x,op(1,%),x)+changevar(t=2*x,op(2,%),x)
;
```

$$\int \frac{2}{4+9x^2} - \frac{5}{\cos(2x)^2}\,dx$$

$$2\int \frac{1}{4+9x^2}\,dx - 5\int \frac{1}{\cos(2x)^2}\,dx$$

$$2\int \frac{1}{12+3t^2}\,dt - 5\int \frac{1}{2\cos(t)^2}\,dt$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{1}{4+t^2}\,dt - \frac{5}{2}\int \frac{1}{\cos(t)^2}\,dt$$

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{5\sin(t)}{2\cos(t)}$$

$$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{3}{2}x\right) - \frac{5\sin(2x)}{2\cos(2x)}$$

Команда **simplify** спрощує вираз. На відміну від попереднього прикладу, тут команда **expand(%,cos)** містить опцію **cos**, яка забезпечує розклад інтегралу на два інтеграли без перетворень другого доданку підінтегральної функції, що містить тригонометричну функцію. Цей же прийом можна було б застосувати у прикладі 1. Рекомендуємо зробити це самостійно.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5x^4 \cos x^5 dx$.

<u>Хід розв'язування</u>

методом комп'ютерних символьних обчислень

Кінцева відповідь:

```
> int(5*x^4*cos(x^5),x=0..Pi/2);
```

$$\sin\left(\frac{1}{32}\pi^5\right)$$

Проміжні дії отримуємо послідовним виконанням команд:

```
> with(student):
Int(5*x^4*cos(x^5),x=0..Pi/2);
changevar(t=x^5,%,t);
value(%);
```

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 5\, x^4 \cos(x^5)\, dx$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{32}\pi^5} \cos(t)\, dt$$

$$\sin\left(\frac{1}{32}\pi^5\right)$$

Оператор **changevar** виконує заміну змінної, **value** – знаходить відповідне значення.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi}\left(\sin x \cos x + 2x \sin x^2\right)dx$.

<u>Хід розв'язування</u>

методом комп'ютерних символьних обчислень

Кінцевий результат:

```
> int(sin(x)*cos(x)+2*x*sin(x^2),x=0..Pi);
```

$$-\cos(\pi^2) + 1$$

Проміжні дії можна зробити так: інтегрувати окремо два доданки, користуючись схемою запропонованою в попередньому прикладі. А можна знайти інтеграл, використовуючи комп'ютерні підказки. Отже, в першому доданку скористаємось підказкою **Hint** для отримання правила інтегрування **Rule**, другий доданок проінтегруємо вже відомим способом. Для використання підказки необхідно підключити пакет **Student[Calculus1]** командою **with(Student[Calculus1])**.

```
> with(student):
  with(Student[Calculus1]):
  Int(sin(x)*cos(x)+2*x*sin(x^2),x=0..Pi);
  J:=expand(%);
  op(1,J);
  Hint(%);
  Rule[%](%%);
  J1:=value(%);
  J1:=rhs(%);
  op(2,J);
  changevar(t=x^2,%,t);
  J2:=value(%);
```

```
Int(sin(x)*cos(x)+2*x*sin(x^2),x=0..Pi)=J1+J2;
```

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x) + 2\,x\sin(x^2)\,dx$$

$$J := \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx + 2\int_0^{\pi} x\sin(x^2)\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx$$

$$[change,\ u = \cos(x),\ u]$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = \int_1^{-1} -u\,du$$

$$J1 := \int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x)\,dx = 0$$

$$J1 := 0$$

$$2\int_0^{\pi} x\sin(x^2)\,dx$$

$$2\int_0^{\pi^2} \frac{1}{2}\sin(t)\,dt$$

$$J2 := -\cos(\pi^2) + 1$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cos(x) + 2\,x\sin(x^2)\,dx = -\cos(\pi^2) + 1$$

Для розкладу на два інтеграли використовуємо команду **expand**, а для виділення доданків - оператор **op**.

Оператор **rhs(%)** відокремлює праву частину вказаного в дужках виразу. Також є оператор **lhs(%)**, який розглядає відповідно ліву частину виразу.

§ 6. Інтегрування частинами

Нагадаємо, що в Maple є пакет **student**, призначений для навчання математики. В ньому міститься набір підпрограм, за допомогою яких прослідковується послідовність дій, які приводять до результату. До таких команд відноситься вже відма команда інтегрування заміною змінної **changevar**, також розглянемо команду інтегрування частинами - **inparts**.

Нагадаємо формулу інтегрування частинами.

Теорема. Нехай функції $U = U(x)$ та $V = V(x)$ мають неперервні похідні на $[a;b]$, тоді має місце така формула:

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx.$$

Якщо позначити підінтегральну функцію *f=u(x)*, то параметри команди інтегрування частинами такі: **intparts(Int(f, x), u)**, де *u* – саме та функція u(x), похідну від якої треба знайти за формулою інтегрування частинами.

Команда **intparts**, так як і **changevar** не дає кінцеву відповідь інтеграла, а лише здійснює проміжні дії.

Не забудьте, що перед використанням описаної вище команди обов'язково треба завантажити пакет **student**.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int xe^{2x}dx$.

<u>Хід розв’язування</u>

методом комп’ютерних символьних обчислень

Кінцевий розв'язок

```
> int(x*exp(2*x),x);
```

$$\frac{1}{2}x\,e^{(2\,x)} - \frac{1}{4}e^{(2\,x)}$$

Проміжні дії мають вигляд:

```
> with(student):
  Int(x*exp(2*x),x);
  intparts(%,x);
  value(%);
```

$$\int x\,e^{(2\,x)}\,dx$$

$$\frac{1}{2}x\,e^{(2\,x)} - \int \frac{1}{2}e^{(2\,x)}\,dx$$

$$\frac{1}{2} x e^{(2x)} - \frac{1}{4} e^{(2x)}$$

Команда **intparts(%,x)** виконує інтегрування частинами. Нескладно бачити, що за *u* прийнято функцію *x* (згідно виразу у дужках після коми).

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int x^2 \sin 3x dx$.

<u>Хід розв'язування</u>

методом комп'ютерних символьних обчислень

Отримаємо кінцевий результат

```
> int(x^2*sin(3*x),x);
```

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x)$$

Проміжні дії подвійного інтегрування частинами представлені нижче

```
> with(student):
  Int(x^2*sin(3*x),x);
  intparts(%,x^2);
  simplify(%);
  intparts(%,x);
  simplify(%);
  value(%);
```

$$\int x^2 \sin(3x)\, dx$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) - \int -\frac{2}{3} x \cos(3x)\, dx$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{3} \int x \cos(3x)\, dx$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) - \frac{2}{3} \int \frac{1}{3} \sin(3x)\, dx$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) - \frac{2}{9} \int \sin(3x)\, dx$$

$$-\frac{1}{3} x^2 \cos(3x) + \frac{2}{9} x \sin(3x) + \frac{2}{27} \cos(3x)$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{x+2} \sin 3x dx$.

<u>Хід розв'язування</u>

методом комп'ютерних символьних обчислень

Кінцева відповідь:

```
> int(exp(x+2)*sin(3*x),x=0..Pi/3);
```

$$\frac{3}{10}e^{2}+\frac{3}{10}e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)}$$

Проміжні дії:

```
> with(student):
  J:=Int(exp(x+2)*sin(3*x),x=0..Pi/3);
  intparts(%,sin(3*x));
  intparts(%,cos(3*x));
  simplify(%);
  isolate(J=%,J);
```

$$J:=\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)}\sin(3x)\,dx$$

$$-\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} 3\cos(3x)\,e^{(x+2)}\,dx$$

$$3e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)}+3e^{2}+\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} -9e^{(x+2)}\sin(3x)\,dx$$

$$3e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)}+3e^{2}-9\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)}\sin(3x)\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)}\sin(3x)\,dx=\frac{3}{10}e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)}+\frac{3}{10}e^{2}$$

Останню команду **isolate(J=%,J);** можна замінити такими командами:

```
> J=%;
```

```
J=solve(%,J);
```

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)} \sin(3x)\,dx = 3\,e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)} + 3\,e^{2} - 9\int_0^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)} \sin(3x)\,dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}\pi} e^{(x+2)} \sin(3x)\,dx = \frac{3}{10}e^{\left(\frac{1}{3}\pi+2\right)} + \frac{3}{10}e^{2}$$

Подвійне інтегрування за частинами призвело до рівняння відносно невідомого (шуканого) інтегралу, яке легко розв’язати за допомогою операторів **isolate** або **solve**.

§ 7. Перетворення графіків функцій

Розглянемо по крокам побудову графіка функції $y = Af(ax+b)+B$.

Крок 1. Побудова графіка функції $y_1 = f(x)$.

Крок 2. Побудова графіка функції $y_2 = f(x+b)$.

1. Якщо $b>0$, то виконуємо перенесення графіка функції y_1 по осі Ох на $-b$ одиниць (на b одиниць вліво);
2. Якщо $b<0$, то виконуємо перенесення графіка функції y_1 по осі Ох на b одиниць (на b одиниць вправо).

Крок 3. Побудова графіка функції $y_3 = f(ax+b)$.

1. Якщо $a>0$, $a\neq 1$, то графік функції y_3 отримується із графіка y_2 стисненням або розтягненням відносно осі Оу.

   1.1. $a>1$, стиснення y_2 з коефіцієнтом a до осі Оу.

   1.2. $a<1$, розтягнення від осі Оу з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

2. Якщо $a=-1$, то графік функції y_3 може бути отриманий з y_2 перетворенням симетрії останнього відносно Оу.

3. Якщо $a<0$, то маємо $f(ax+b) = f(-|a|x+b)$. Тому графік функції y_3 отримується із графіка y_2 стисненням з коефіцієнтом $|a|$ до осі Оу та симетрією отриманого графіка $y_3 = f(|a|x+b)$ відносно осі Оу.

Крок 4. Побудова графіка функції $y_4 = Af(ax+b)$.

1. Якщо $A>0$, $A\neq 1$, ординати графіка функції y_4 отримується множенням на A відповідних ординат точок графіка функції y_3.

1.1. Якщо $A>1$, то таке перетворення графіка y_3 називається його розтягненням від осі Ох з коефіцієнтом A.

1.2. Якщо $0<A<1$, то перетворення графіка y_3 називається стисненням до осі Ох.

2. Якщо $A=-1$, то графік функції y_4 можна отримати із графіка функції y_3 перетворенням симетрії останнього відносно осі Ох.

3. Якщо $A<0$, $A\neq -1$, то $y_4 = Af(ax+b) = -|A| f(Ax+b)$, тобто графік функції y_4 отримується розтягненням (стисненням) графіка функції y_3 від осі Ох з коефіцієнтом $|A|$ і наступним перетворенням симетрії відносно осі Ох.

Крок 5. Побудова графіка функції $y_5 = Af(ax+b)+B$.

1. Якщо $B>0$, то виконуємо перенесення графіка функції y_4 по осі Оу на B одиниць (на B одиниць вгору);

2. Якщо $B<0$, то виконуємо перенесення графіка функції y_4 по осі Оу на $-B$ одиниць (на B одиниць вниз).

При відтворення на одному графіку декілька кривих, варто використовувати побудову ліній різними стилями, кольорами, з різною товщиною.

Серед опцій функції **plot** (функція побудови графіків)є спеціальний параметр **discont**. Якщо задати його значення рівним true, то якість графіків істотно покращується (особливо це стосується побудови графіків функції з розривами).

Для побудови графіків декількох функцій на одному рисунку, треба в квадратних дужках перерахувати функції.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y=5(3x+1)^3-2$ та показати всі проміжні кроки побудови.

<u>Хід розв’язування</u>

```
> with(plots);
> A:=5;  a:=3;  b:=1;  B:=-2;
```

$$A := 5 \qquad a := 3 \qquad b := 1 \qquad B := -2$$

```
> f:=A*(a*x+b)^3+B;
```

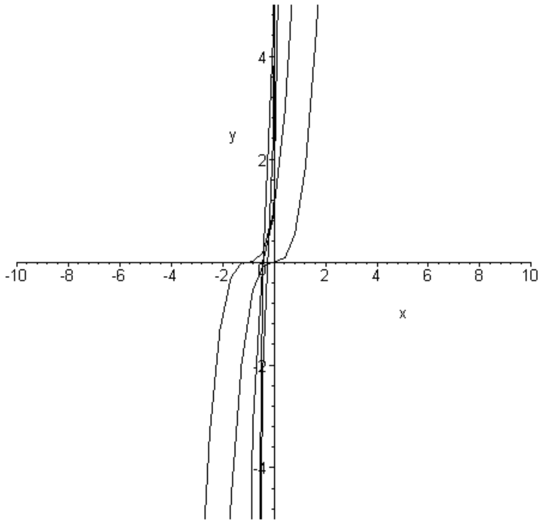
$$f := 5\,(3\,x+1)^3-2$$

```
> y1:=x^3;
  y2:=(x+b)^3;
  y3:=(a*x+b)^3;
  y4:=A*(a*x+b)^3;
  y5:=A*(a*x+b)^3+B;
```

$$y1 := x^3 \qquad y2 := (x+1)^3 \qquad y3 := (3\,x+1)^3$$

$$y4 := 5\,(3\,x+1)^3 \qquad y5 := 5\,(3\,x+1)^3 - 2$$

```
> plot([y1,y2,y3,y4,y5],x=-10..10,y=-5..5);
```



Існують функції швидкої побудови графіків. Функція **smartplot(f)** призначена для створення двовимірних графіків. Задання опцій в цих графічних функціях не передбачається, тому їх вважають «чорновим» варіантом побудови.

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = 2\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6})$ та показати всі проміжні кроки побудови.

<u>Хід розв’язування</u>

```
> with(plots):
> f:=2*sin(x/3-Pi/6);
```

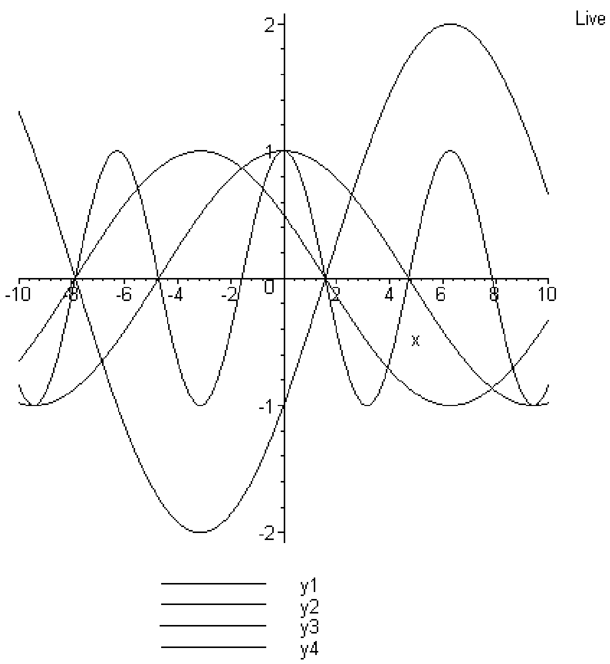
$$f := -2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

```
> y1:=cos(x); y2:=cos(x/3); y3:=cos(x/3+Pi/3); y4:=-2*y3;
```

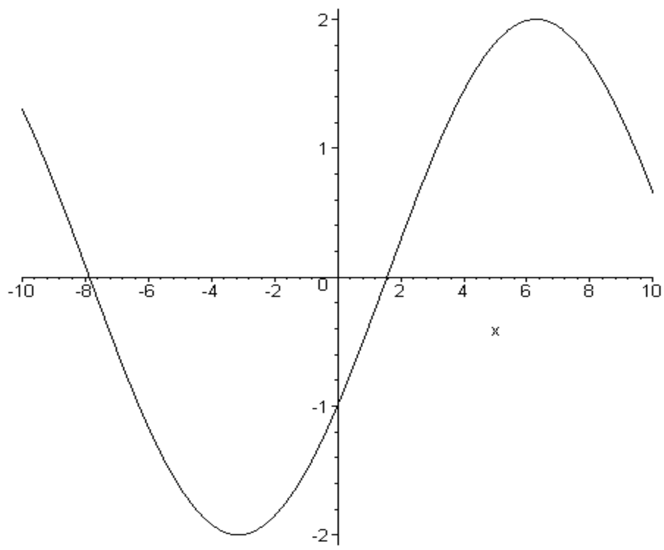
$$y1 := \cos(x) \qquad y2 := \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y3 := \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \qquad y4 := -2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

```
> smartplot(y1,y2,y3,y4);
```




```
> plot(f,x=-10..10);
```



Література до розділу

1. Авраменко О.В., Шевченко Н.Г. Maple 9 та 1230 інтегралів або Символьні обчислення у математичному аналізі. Частина 1.– Кіровоград: Видавництво РА "Антураж А", 2004. – 128 с.
2. Авраменко О.В., Шлянчак С.О. Maple 9 та 1140 інтегралів або Символьні обчислення у математичному аналізі. Частина 2.– Кіровоград: ПП "Авангард", 2007. – 128 с.
3. Авраменко О.В., Шлянчак С.О. Методика застосування нових інформаційних технологій під час вивчення математичних дисциплін у вищій школі. - Кіровоград: Авангард, 2008. – 206 с.
4. Васильев А.Н., Maple 8. Самоучитель.- М.: Диалектика, 2003.
5. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех.- М.: Мир, 1997.
6. Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Компьютер в математическом исследовании. Учебный курс.- Спб.: Питер, 2001.
7. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V.- Солон, 1998.
8. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики.- БХВ – Петербург, 2001.
9. Попов Б.О. Розв'язування математичних задач у системі комп'ютерної алгебри Maple V.- Київ: VIP.
10. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. Ряди.- К.: Вища школа, 1995.
11. Heal K. M., Hansen M. L., Rickard K.M. Maple 6. Learning guide.- Waterloo Maple Inc, 2000.
12. Heck A. Introduction to Maple. Second edition.- Springer – Verlag, 1996.
13. Monagan M.B., Geddes K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., McCarron J. Maple 6. programming guide.- Waterloo Maple Inc. 2000.
14. Redfern D. The Maple Handbook.- Springer – Verlag, 1996.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Урок з математики (6 клас)

Тема. Від'ємні числа. Прямокутна система координат.

Мета. Узагальнення й систематизація знань про від'ємні числа та дії над ними, модуля числа, порівняння чисел. Виховувати в учнів інтерес до математики, розвивати допитливість, любов до знань.

Обладнання: таблиці, картки, проектор з кодоплівками.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань учнів.

Хід уроку

Урок проводиться у формі гри-подорожі. Лівіше дошки вивішується плакат "Пам'ятка учасника гри", правіше – "Маршрут подорожі".

1.Вступне слово вчителя.

Шановні друзі! Сьогодні ми з вами вирушаємо в цікаву подорож по Країні Математиці. Нам необхідно проїхати складним маршрутом, долаючи на своєму шляху різні перешкоди. (Для гри вчитель розподіляє клас на дві команди, які обирають собі капітанів)

Зважте на те, що під час гри треба бути дуже уважним (показує плакат: "Пам'ятка учасника гри"). Працювати швидко, правильно, раціонально.

Девіз нашої гри: "Один – за всіх, і всі – за одного!" Тому, насамперед, забороняється залишати в біді капітана, викрикувати відповіді без дозволу вчителя, підказувати. За порушення дисципліни або правил гри команда одержуватиме штрафні очки.

Хто знає відповідь, піднімає руку. За кожну правильну відповідь або правильно розв'язане завдання команда отримує один бал. Під час підбиття підсумків ураховуватиметься також швидкість й організованість дій команд і капітанів та поведінка учасників гри. Якщо команда відмовляється відповідати або дає неправильну відповідь, то слово надається команді-суперниці.

Щасливої вам дороги!

2. Вчитель звертає увагу на маршрут подорожі. Показує першу станцію.

Увага! Ми вирушаємо в дорогу зі станції **"З'їзд чисел"**. Заглянемо на хвилинку до Залу засідань.

Біля мікрофону саме депутат від'ємних чисел. Він вимагає визнати їх рівноправними членами числової множини, адже завдяки від'ємним числам дія віднімання стає завжди можливою. А головне – за допомогою від'ємних чисел можна позначати значення величин, які можуть змінюватися в протилежних напрямках. Та хіба це не важливо? І невже тільки задля цього не варто визнати від'ємні числа рівноправними?

Професор Нуль, який головує на з'їзді, погодився і запропонував вважати від'ємні числа дійсними членами числової множини. А щоб від'ємні числа не почували себе самотньо, нехай кожне додатне число вибере собі напарника – від'ємне число.

Почувши це, деякі додатні числа – особливо невеликі, дробові – захвилювалися: "А що, коли старші числа розберуть собі партнерів, а нам не вистачить?" Та Нуль їх швидко заспокоїв: "Нехай кожне додатне число вибере собі число, рівне за модулем, але з протилежним знаком. Тоді у нас вийдуть чудові пари:

+1 і –1; +1/3 і –1/3; +7,8 і –7,8; …"

Запитання до І команди:

– Як називаються такі числа?

(Такі числа називаються протилежними).

Тільки одне число залишилось без пари, адже воно не належало ні до додатних, ні до від'ємних. Але це число не сумувало: воно вмістилося в центрі між додатними й від'ємними числами і разом з ними утворило єдину множину – множину раціональних чисел.

Запитання до ІІ команди:

– Що це за число?

(Нуль – професор, який головує на з'їзді).

3. Покидаючи Зал засідань, ми швидко рухаємося за маршрутом. І першою перешкодою на нашому шляху постає "Болото знаків". Щоб

успішно подолати цю перешкоду, необхідно визначити, хто саме подає вам руку допомоги: товариш чи ворог?

Лише розпізнавши його правильно, ви спокійно проїжджаєте болото. Можливо, вам допоможуть декілька прикладів. Зважаючи на те, що “–” – це ворог, а “+” – товариш, вам треба закінчити фразу.

(Учням роздаються картки. Вони розв’язують приклади й закінчують фразу).

$$-(-2) = \qquad -(-0{,}5) =$$

$$-(-\frac{3}{4}) = \qquad -(-1\frac{3}{7}) =$$

Ворог мого ворога – мій ... (товариш).

$$-(+5) = \qquad -(+1{,}3) =$$

$$-(+\frac{2}{7}) = \qquad -(+2\frac{1}{4}) =$$

Ворог мого товариша – мій ... (ворог).

$$+(-7) = \qquad +(-8{,}2) =$$

$$+(-\frac{1}{8}) = \qquad +(-5\frac{1}{12}) =$$

Товариш мого ворога – мій ... (ворог).

$$+(+11) = \qquad +(+2{,}5) =$$

$$+(+\frac{12}{17}) = \qquad +(+15\frac{1}{3}) =$$

Товариш мого товариша – мій ... (товариш).

(Картки учні кожної команди здають окремо. Їх доцільно перевірити під час виконання учнями наступного завдання).

4. Тепер нам треба переїхати через “Міст Порівняння чисел”. Але на ньому стоять вартові: знаки “менше” і “більше”. Вони пропустять вас, якщо ви правильно порівняєте запропоновані числа.

(Учні отримують картки з прикладами на порівняння чисел, причому завдання треба дати диференційовані за трьома ступенями складності).

І. Порівняйте числа:

$-1{,}2 \quad і \quad -1\frac{1}{3};$ $\qquad$ $-11\frac{2}{9} \quad і \quad 2\frac{6}{11};$

$-\frac{3}{4}$ *і* $-\frac{5}{7}$; $3{,}87$ *і* $3\frac{7}{8}$.

II. Порівняйте числа:

$-2{,}58$ *і* $-2{,}71$; $-\frac{7}{8}$ *і* $-\frac{11}{8}$;

$-12\frac{1}{3}$ *і* $5\frac{1}{6}$; $\frac{5}{8}$ *і* $\frac{9}{11}$.

III. Порівняйте числа:

$-11{,}6$ *і* $-11{,}8$; $+\frac{1}{3}$ *і* $-\frac{2}{3}$;

$-1\frac{1}{3}$ *і* 0; $\frac{7}{8}$ *і* $\frac{7}{11}$.

5. І ось на нашому шляху розкинулось "Чарівне озеро". Щоб його перепливти, треба на своєму шляху витягти чарівні координатні сіті і подивитись, хто ж до них потрапив. Для цього на координатній площині треба поставити точки із заданими координатами і з'єднати послідовно відрізком кожну точку з попередньою. У результаті отримається фігура, яку вам треба розпізнати.

(Капітани отримують картки із завданнями. Конкурс проводиться у вигляді естафети. Кожен учень ставить тільки одну точку і з'єднує її відрізком з попередньою. Капітан не має права підказувати, але стежить за правильністю виконання завдання на дошці. Якщо відрізок зображено неправильно, він його витирає і викликає наступного члена команди. Перемагає та команда, яка за меншу кількість кроків швидко і правильно зобразила фігуру і назвала її.)

I.(-6;-1), (-6;-6), (-7;-6), (-7;5), (-8;4), (-8;7), (-6;9), (-6;10), (-5;10), (-5;4), (-2;7), (0;6), (2;7), (5;4), (6;2), (6;-2), (5;-2), (5;0), (4;0), (4;-6), (3;-6), (3;-2), (1;-1), (-6;-1). (Верблюд).

Капітану зобразити точку (-6;7), не з'єднуючи її з іншими точками.

II.(-9;7), (-7;8), (-6;10), (-3;10), (-1;7), (8;1), (15;-2), (13;-4), (6;0), (4;-1), (3;-1), (2;-7), (-1;-7), (1;-6), (2;-1), (0;-1), (-2;-7), (-5;-7), (-3;-6), (-1;-1), (-5;2), (-6;5), (-7;6), (-9;7). (Птах).

Капітану зобразити точку (-5;8), не з'єднуючи її з іншими точками.

(Правильні рисунки треба висвітлити з допомогою діапроектора).

6. І остання перешкода на нашому шляху – це “Замок Його величності короля Модуля”. Щоб потрапити в Замок, треба відкрити декілька замків. А для цього – правильно розв’язати приклади.

(Учні отримують картки з диференційованими завданнями, а капітани на дошці розв’язують рівняння).

I.* Обчисліть:

$$\left|-\frac{1}{2}\right| + |-0{,}38| = \ldots; \quad |5{,}4| \cdot |-2{,}2| = \ldots; \quad \left|-\frac{8}{11}\right| : \left|\frac{128}{121}\right| = \ldots; \quad \left|-3\frac{2}{11}\right| - \left|-1\frac{9}{13}\right| = \ldots$$

II. Обчисліть:

$$|-1{,}2| + |1{,}6| = \ldots; \quad |-3{,}8| : |1{,}9| = \ldots; \quad \left|-\frac{1}{4}\right| \cdot \left|\frac{8}{7}\right| = \ldots; \quad \left|2\frac{11}{12}\right| - \left|-1\frac{1}{2}\right| = \ldots$$

III.° Обчисліть:

$|–3| + |5| =…;$ $|–21| : |-7| =…;$ $|-8| \cdot |-7| =…;$ $|1{,}2| – |0{,}2| =…$

Конкурс капітанів

Розв’яжіть рівняння:

I команда		II команда	
$\lvert x\rvert = -0{,}3$;	$\lvert x\rvert = 2\frac{1}{6}$	$\lvert x\rvert = -1\frac{2}{3}$;	$\lvert x\rvert = 5{,}2$

(У кінці уроку вчитель підбиває підсумки. Вітає учнів, які успішно подолали всі перешкоди й у Тронному залі Замку короля Модуля нагороджує їх п’ятірками. Потім виставляє оцінки іншим учасникам гри й оголошує переможців. Бажано домашнє завдання теж диференціювати за трьома ступенями складності).

– До побачення, друзі. Урок закінчено. На все добре!

Пам’ятка учасника гри

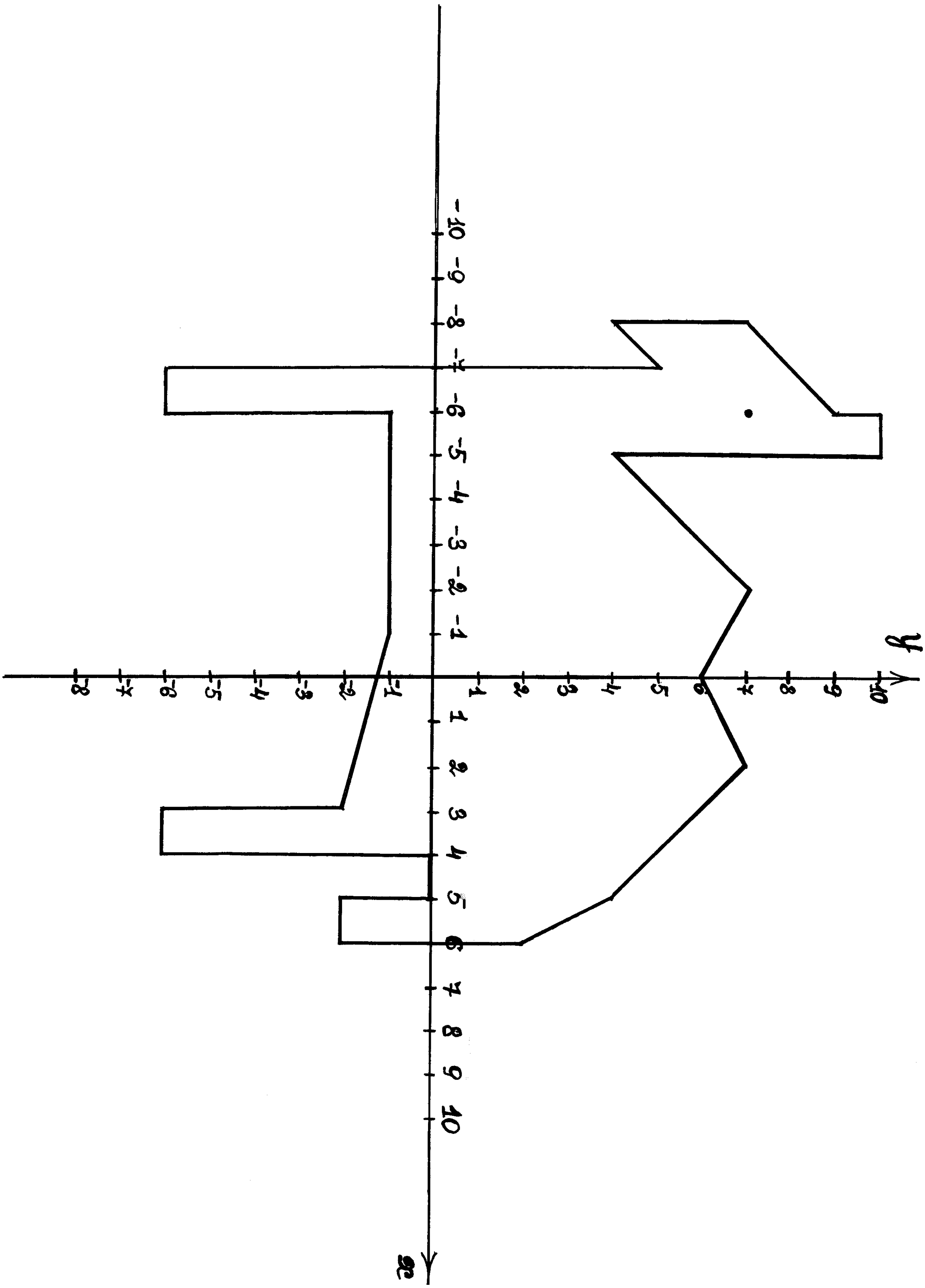
1. Під час гри будь зібраним і дуже уважним.
2. Працюй швидко, правильно, раціонально використовуючи час.
3. Якщо завдання незрозуміле, можна просити допомоги в капітана.

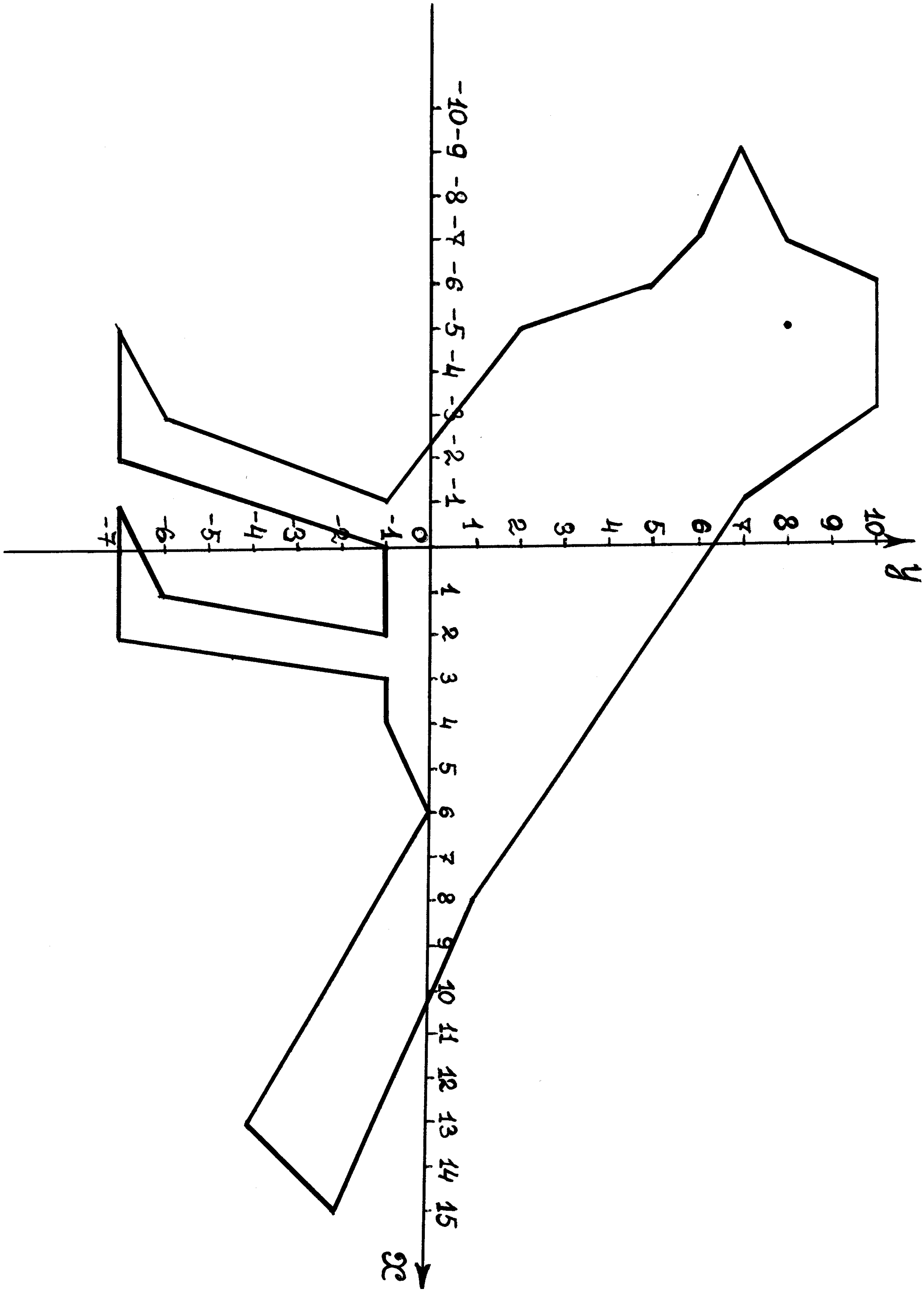
Не можна:

1. Залишати в біді капітана.
2. Викрикувати відповіді або запитання, підказувати.
3. Порушувати дисципліну на уроці й правила гри.

Пам’ятайте, девіз гри :

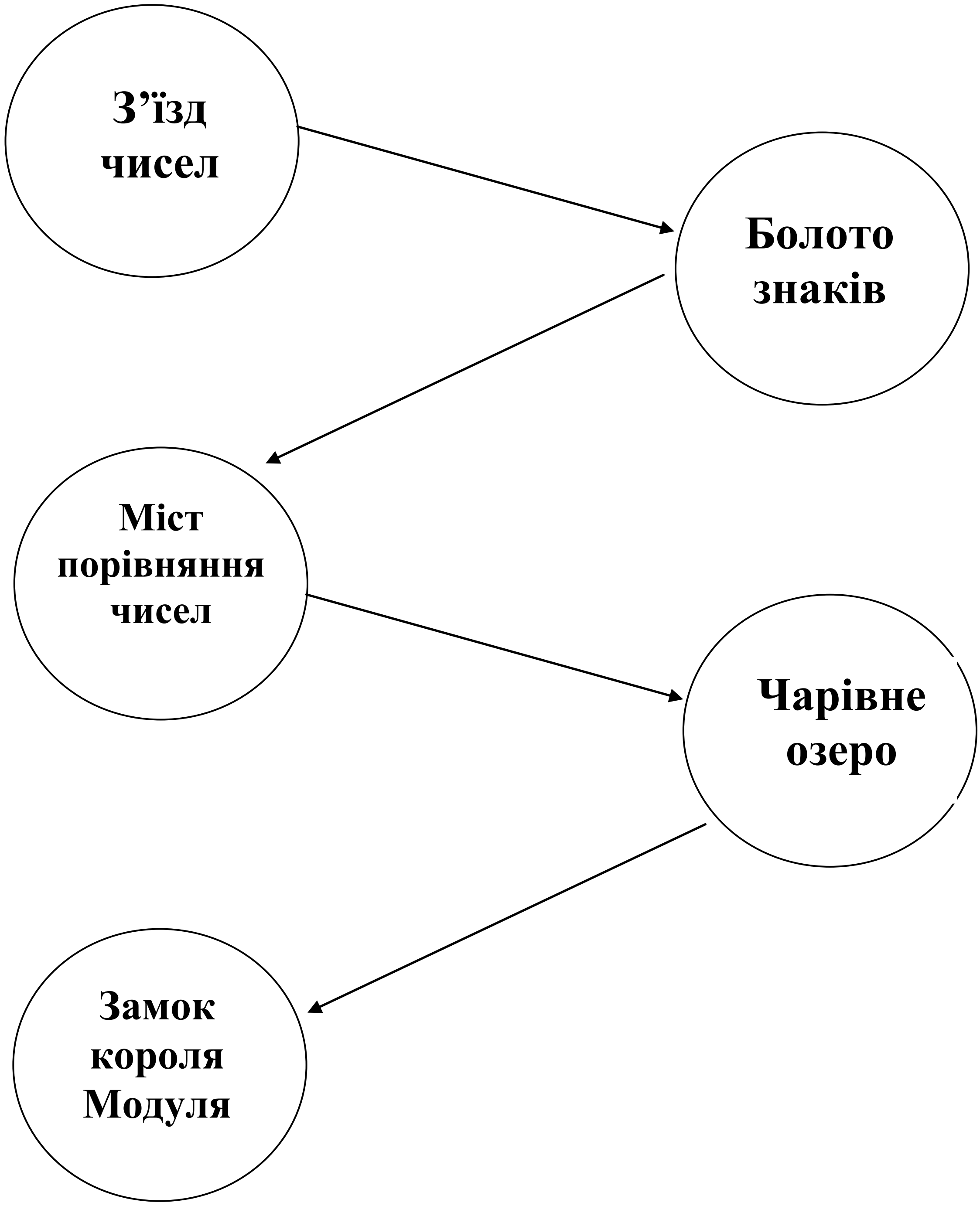
“Один – за всіх, і всі – за одного!”





x
y
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

маршрут подорожі



Додаток 2

Урок з математики (9 клас)

Тема. Функції та їх властивості.

Мета. Узагальнити і систематизувати знання елементарних функцій, способів їх задання, властивостей (область визначення, нулі функції, парність/непарність, монотонність, знакосталість тощо), перевірити вміння визначати ці властивості практично в нестандартних ситуаціях. Виховувати в учнів креативність, інтерес до математики, розвивати логічне мислення, допитливість, любов до знань.

Обладнання: плакат з маршрутом подорожі, прапорці (з голочками на кінцях древка), гральний кубик, фішки.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань учнів.

Хід уроку

Клас поділяється на дві команди, обираються капітани (Ах і Ох), які в ході гри по черзі викликають до дошки учасників команд. Жеребкуванням визначається, яка команда починає гру першою.

Капітан кидає гральний кубик, рухається прапорцем по карті маршруту. Якщо біля кружечка немає стрілок, то капітан викликає учня із своєї команди, який відповідає на запитання під цим номером. Якщо відповідь правильна, то команда отримує фішку, й право наступного ходу залишається за нею. Якщо відповідь неправильна, то відповідає капітан. За правильну відповідь капітана команда отримує фішку, але хід переходить до команди-суперниці. Після трьох підряд правильних відповідей команда отримує додаткову фішку, і хід переходить до команди-суперниці.

Якщо прапорець зупиняється в кружечку зі стрілочкою, то треба рухатися за стрілкою. Причому, якщо рух уперед, то команда має пільги: учень, який відповідає, може просити допомоги в капітана, і при цьому команда не втрачає хід. Якщо рух назад, то, даючи правильну відповідь, команда отримує фішку, але право ходу переходить до протилежної команди, крім того учень, який відповідає, не має права на допомогу капітана. Якщо він відповідає неправильно, то хід переходить до протилежної команди.

Доцільно виготовити великий плакат, на якому оригінально розмалювати кожен етап. Наприклад, біля стрілочки від кружечка з №5 до кружечка з №9 намалювати річку і човен, в якому Ах і Ох перепливають від №5 зразу аж до №9; біля кружечка з №8 – змію, від якої Ах і Ох наввипередки тікають за стрілкою аж до №1.

Якщо номер завдання повторився, то вдруге задається те питання, яке в ході гри “проскочили”.

1. Дайте означення функції. Якими способами можна задати функцію? Наведіть приклади.
2. Що називається графіком функції? Як називається графік функції, заданої формулою:
   а) $y = 7x - 9$; б) $y = 2x^2 + 3x - 5$; в) $y = 5x^3$; г) $y = -6 / x$?
3. Як можна знайти значення функції для даного значення аргументу, якщо функція задана:
   а) таблично; б) формулою; в) графіком?
   Наведіть приклади.
4. Як знайти область визначення функції, заданої аналітично? Чи належить число 3 області визначення функції:

   1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; 2) $y = \sqrt[4]{6x - x^2}$; 3) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x-6}}$;

   4) $y = \sqrt[5]{x-2}$; 5) $\dfrac{1}{|x-1|-2}$?
5. Перехід до № 9.
6. Як знайти значення аргументу, при яких значення функції дорівнюють нулю; більші нуля; менші нуля? Наведіть приклади.
7. Як знайти точки перетину графіка функції з осями координат? Знайдіть точки перетину з осями координат графіків функцій:

   1) $y = 3x^2 - 6x + 7$; 2) $y = 6x^2 - 6$;

   3) $y = 2 + \dfrac{1}{1+x^2}$; 4) $y = \dfrac{x(x-5)(x+8)}{x^2+5}$.
8. Перехід до № 1.
9. Як перевірити, що точка *A (a;b)* належить графіку функції $y = f(x)$? Чи належить точка M(-2;5) графіку функції:

   1) $y = x^2 - 3x - 5$; 2) $y = 5x + 15$;

   3) $y = \sqrt{x^2 + 12}$; 4) $y = \dfrac{2{,}5x}{1+x}$?
10. Як аналітично знайти точки перетину графіків двох функцій? Визначте, чи перетинаються графіки функцій $y = 2x - 2{,}4$ і $y = 3{,}2 / x$.
11. Доведіть, що графіки функцій $y = x^2$ і $y = x - 20$ не мають спільних точок.
12. Відомо, що функція y = f (x) зростаюча. Порівняйте значення функції:

    а) $f(5)$ і $f(-6)$; б) $f(-3)$ і $f(-6)$; в) $f\left(\dfrac{1}{5}\right)$ і $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

13.Перехід до № 4.

14.Запишіть аналітичні умови, за виконання яких графік функції симетричний відносно осі ординат (початку координат).

15.Дослідіть на парність функцію:

а) $f(x) = 6$;

б) $g(x) = (x – 3)^2$;

в) $h(x) = (x^3 – 5x)^7$.

16.Відомо, що точки A(– 3; – 2), B(1; 5), C(3; 2), D(– 1; – 5) належать графіку деякої функції. Чи можна стверджувати, що дана функція:

а) парна; б) непарна; в) може бути непарною;

г) може бути парною; ґ) не є парною; д) не є непарною?

17.Відомо, що парна функція зростає на проміжку (–∞; 0). Що можна сказати про її поведінку на проміжку (0; +∞)?

18.Відомо, що непарна функція спадає на проміжку (0; +∞). Що можна сказати про поведінку функції на проміжку (–∞; 0)?

19.Перехід до № 23.

20.На множині дійсних чисел R задана спадна функція. Чи може бути функція:

а) завжди додатною; б) завжди від'ємною; в) парною; г) непарною?

21.Числова функція не приймає нульових значень. Чи буде вона обов'язково знакосталою? Наведіть приклади.

22.Перехід до № 16.

23.Розгляньте таблиці:

а)

x	–2	–1	0	1	2
y	2	1	0	1	2

б)

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Чи є залежності, задані таблицями, функціями? Якщо так, то спробуйте задати ці функції формулами і вкажіть їх області визначення.

24. На якому з наступних рисунків (рис.1*а, б, в*) зображена траєкторія руху точки A, якщо про її координати відомо:

а) x не змінює свого значення, а y приймає всі значення від $–3$ до $–7$;

б) x пробігає всі дійсні числа від $–2$ до 3 і $y = –3$;

в) x приймає всі значення від $–2$ до 3, а y приймає всі значення від $–3$ до $–7$?

25. Чи співпадають області визначення функцій:

а) $f(x)=\sqrt{(x-1)(x+2)}$ і $h(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ і $h(x)=x+1$;

в) $f(x)=\sqrt{x^2}$ і $h(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$; г) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ і $h(x)=x^2-1$?

26. Вкажіть, яку з даних ліній (рис.2*а, б, в, г*) визначає кожне з рівнянь:
 1) $x = -3{,}5$; 2) $y = 4$; 3) $x = y$; 4) $x^2 + y^2 = 4$.

27. Визначте, які з точок $A(2; 15)$, $B(-2{,}5; 5{,}25)$, $C(-113; 520)$, $D(320; 150)$ належать графіку функції $y = 4{,}5x + 6$.

28. Чи може графік функції: а) $y = 5x - 3{,}5$; б) $y=\dfrac{3-x}{2-x}$; в) $y = x^2 + 2$; г) $y=\sqrt{x}$ проходити через точку, абсциса якої дорівнює: 1) 0; 2) –5; 3) 2? Якщо так, то обчисліть відповідну ординату.

29. Перехід до № 25.

30. Знайдіть точки перетину з віссю Ox графіка функції:

 а) $y = 3x^2 + 8$; б) $y=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x-1}{x^2+3x+1}$; в) $y=\dfrac{\sqrt{2}x-3}{\sqrt{x^2+4}}$;

 г) $y = |x^2 - 3x + 2|$; ґ) $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{3}{x+1}$.

31. Учениці було запропоновано побудувати графіки функцій:
 а) $y = x^3$; б) $y = 4x$.

Використовуючи аналітичне задання, вона склала таблиці значень функції для деяких значень аргументу. За отриманими точками побудувала схематично графіки.

Результатом роботи учениці було наступне:

а) $y = x^3$;

x	–2	0	2
y	–8	0	8

б) $y = 4x$.

x	–2	0	2
y	–8	0	8

Учениця отримала однакові графіки (рис.3) й зробила висновок, що рівність $x^3 = 4x$ є тотожністю, а функції $y = x^3$ і $y = 4x$ рівні. Спробуйте спростувати цей висновок.

32. Задайте функцію так, щоб її природною областю визначення була множина:
 а) усіх додатних чисел; б) усіх чисел, менших 1; в) $[-2; 6]$; г) $(-\infty; +\infty)$.

33. Наведіть приклади функцій, множиною значень яких є:
 а) парні числа; б) невід’ємні числа; в) проміжок $[2; 3)$; г) число 0,(3).

34. Які з наступних графіків функцій (рис.4*а, б, в, г, д, е*) симетричні відносно:
 а) осі ординат; б) початку координат?

Для яких функцій, зображених даними графіками, в області їх визначення виконується рівність:

а) $f(-a) = f(a)$; б) $f(-a) = -f(a)$?

Яку особливість має область визначення парної або непарної функції?

35.Не будуючи графіків, визначте, у яких із наступних функцій графіки симетричні відносно:

а) осі ординат; б) початку координат.

1) $y = \sqrt{x^6 + 1}$; 2) $y = (x+1)^2$; 3) $y = 3x^2 + 6x$;

4) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$; 5) $y = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{2x^2 - 5}$; 6) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$.

36.Із функцій, заданих наступними графіками (рис.5*а, б, в, г, д, е, є, ж, з*), виберіть:

а) парні; б) непарні.

37.Добудуйте графік функції (рис.6), якщо відомо, що ця функція на проміжку [– 4; 4]:

а) парна; б) непарна.

38.Три функції задано різними способами:

а) таблично:

x	-3	-2	0	1	1,5
y	2	0	2	6	8,7

б) аналітично: $y = x^2 + 3x + 2$; в) графічно (рис.7).

Вкажіть множину значень кожної із заданих функцій.

Чи приймають функції нульові значення? Якщо так, то при яких значеннях аргументу?

Як знайти нулі функції, якщо вона задана таблично, аналітично, графічно?

39.Перехід до № 30.

40.Графік якої функції (з указаних на “пелюстках”) зображено на рис.8 в центрі?

У кінці уроку вчитель підбиває підсумки, підраховує отримані командами фішки, визначає переможців, виставляє оцінки.

Рисунки до задач №№ 24, 26, 31, 34, 36, 37, 38 бажано накреслити на плакатах або до початку уроку на дошці.

Добір вправ до уроку потрібно здійснювати, виходячи з навчально-виховної мети, яку ставить перед собою учитель, з урахуванням реальних можливостей учнів і наявності часу для цього.

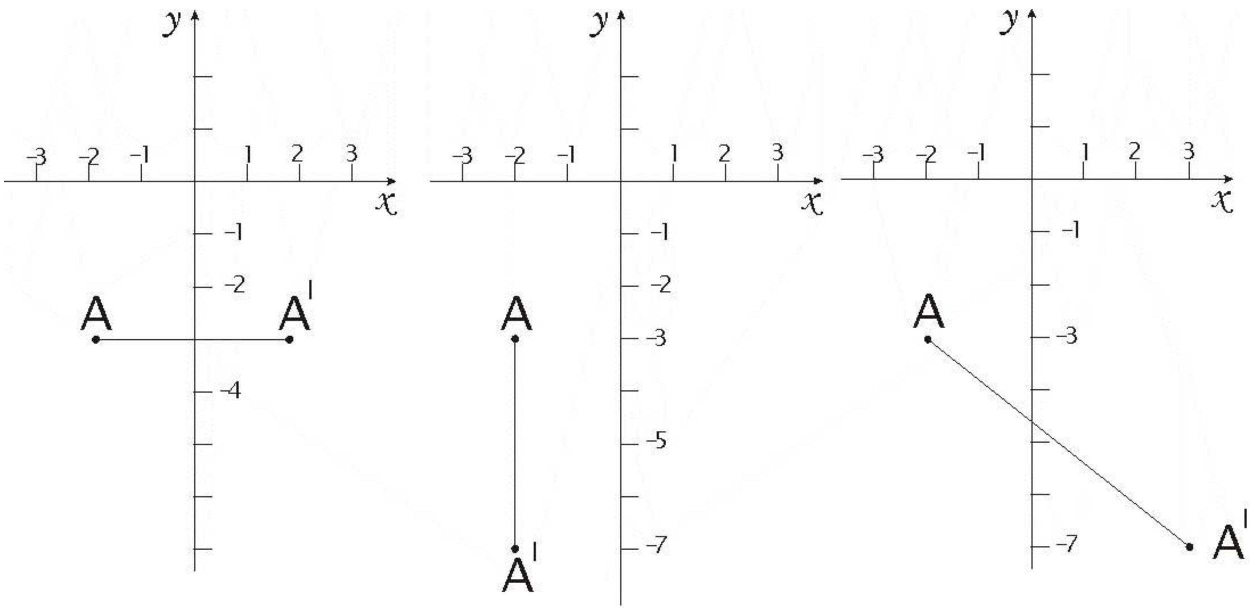


Рис.1

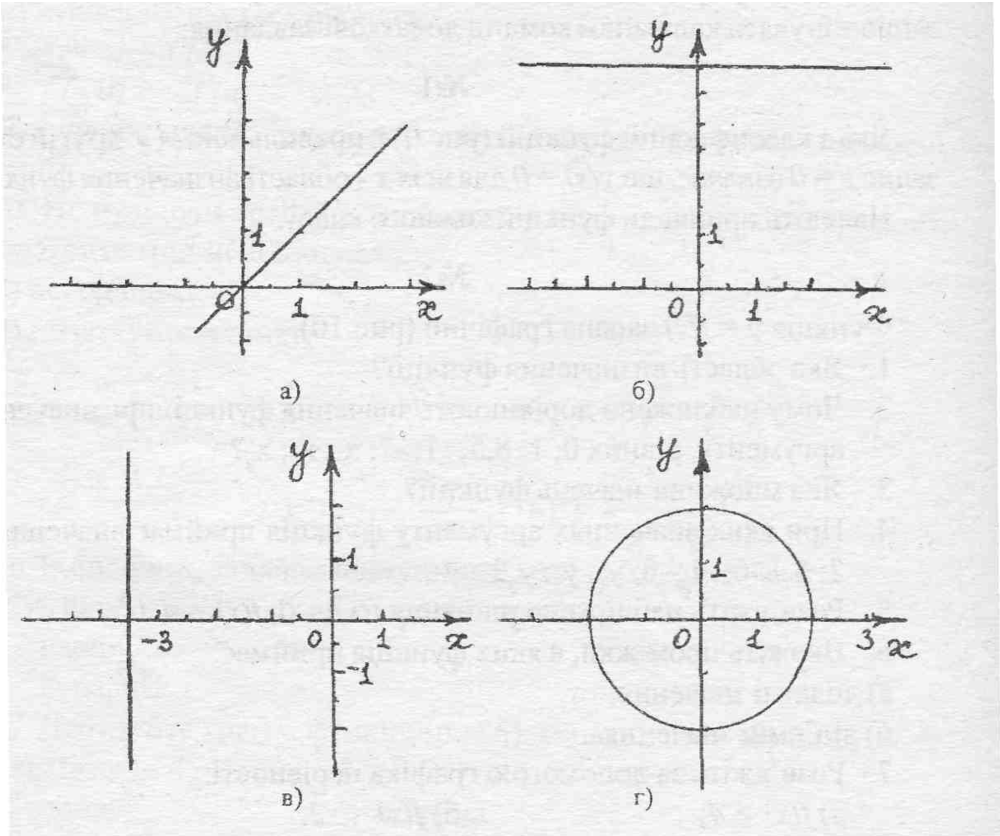


Рис.2

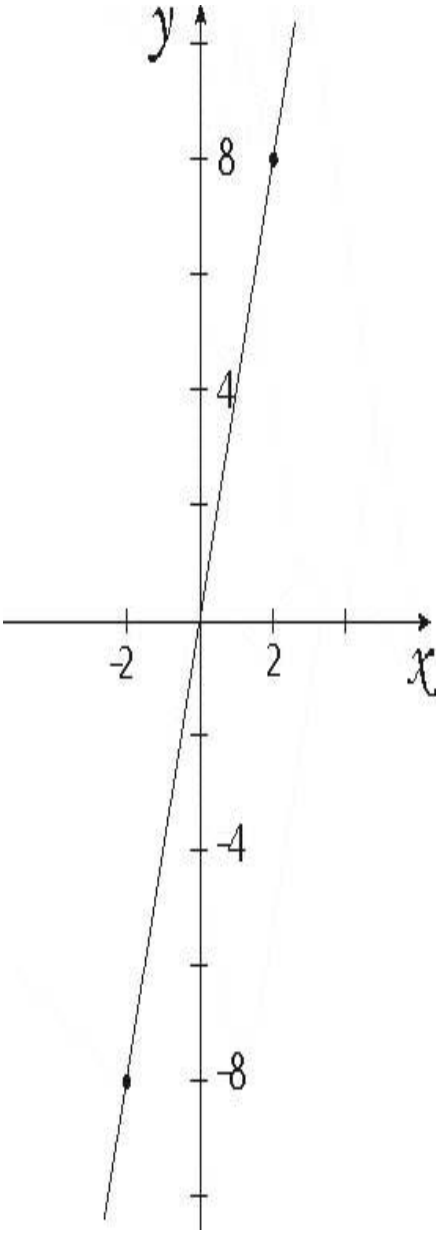


Рис. 3

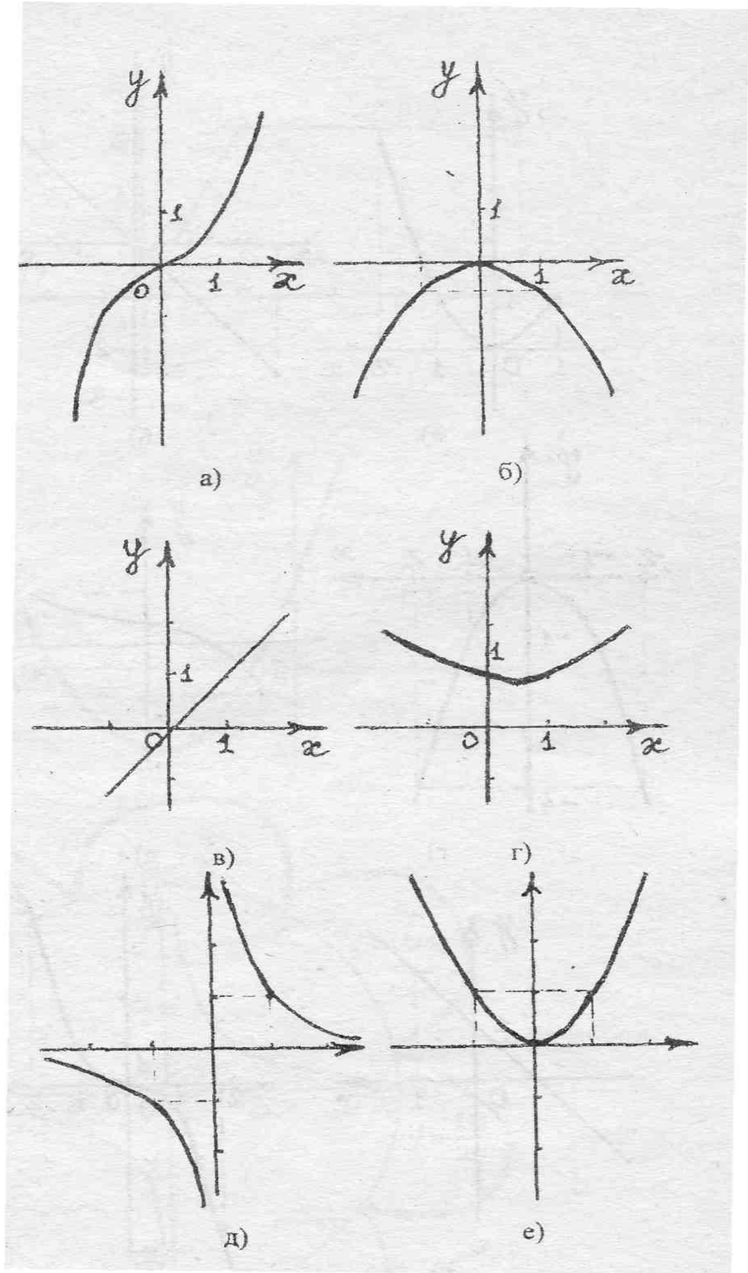


Рис. 4

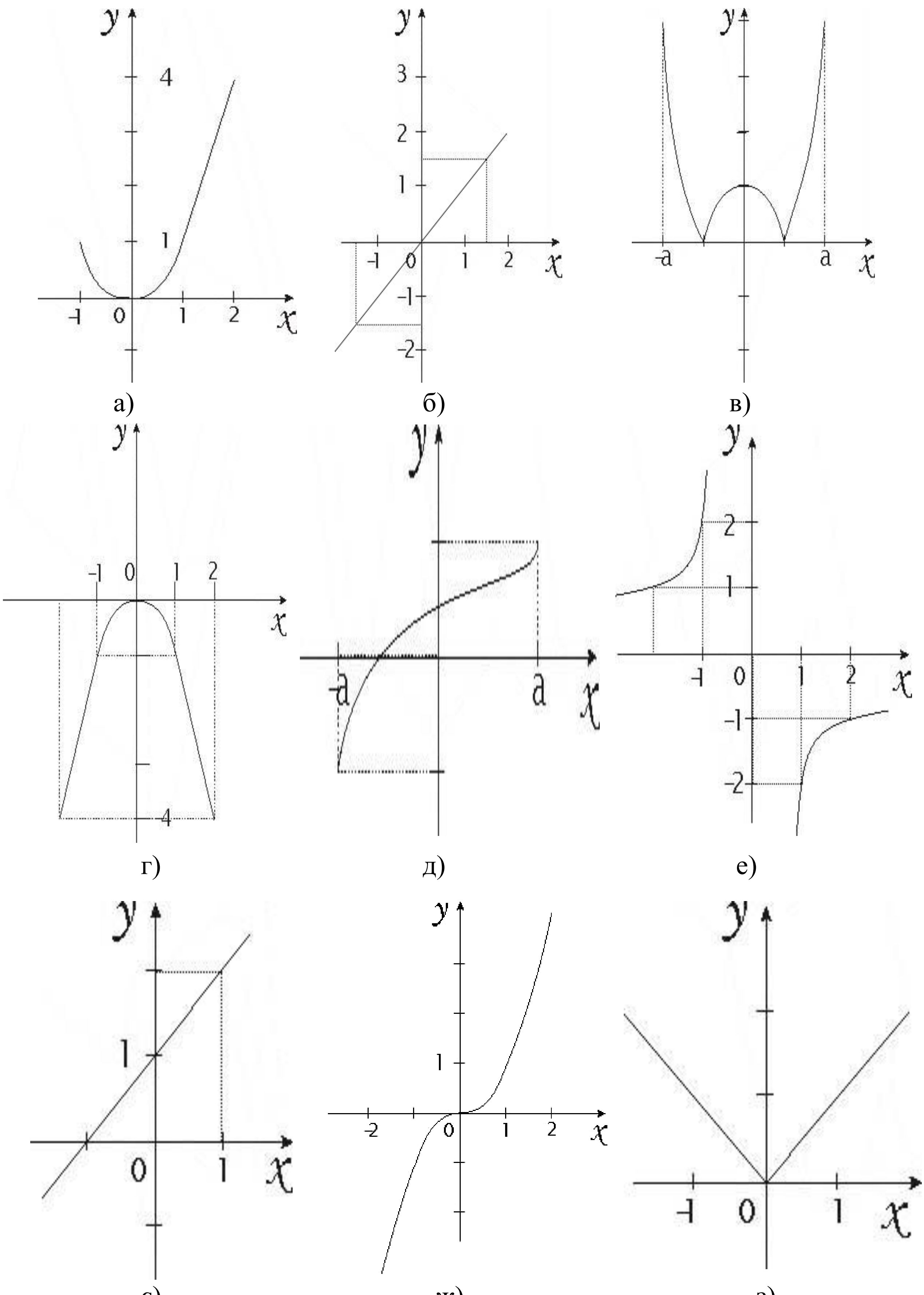


Рис. 5

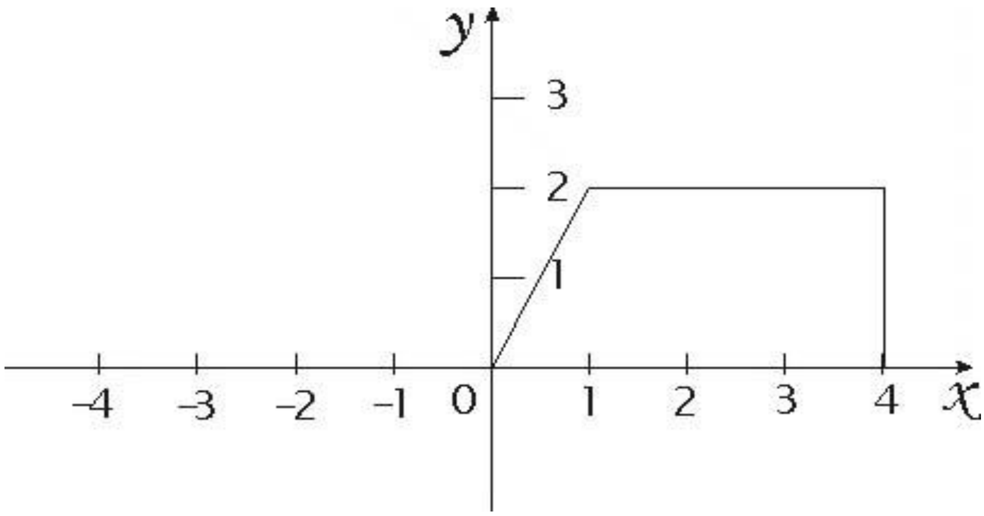


Рис. 6

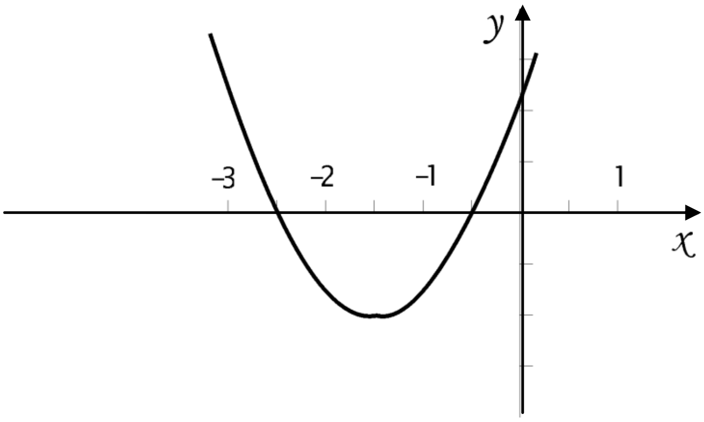


Рис. 7

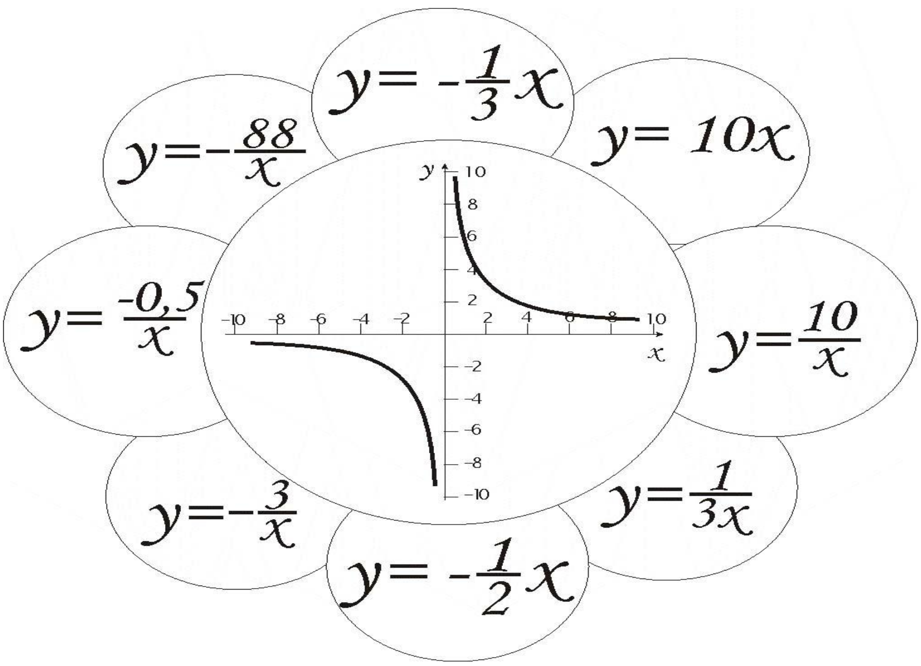
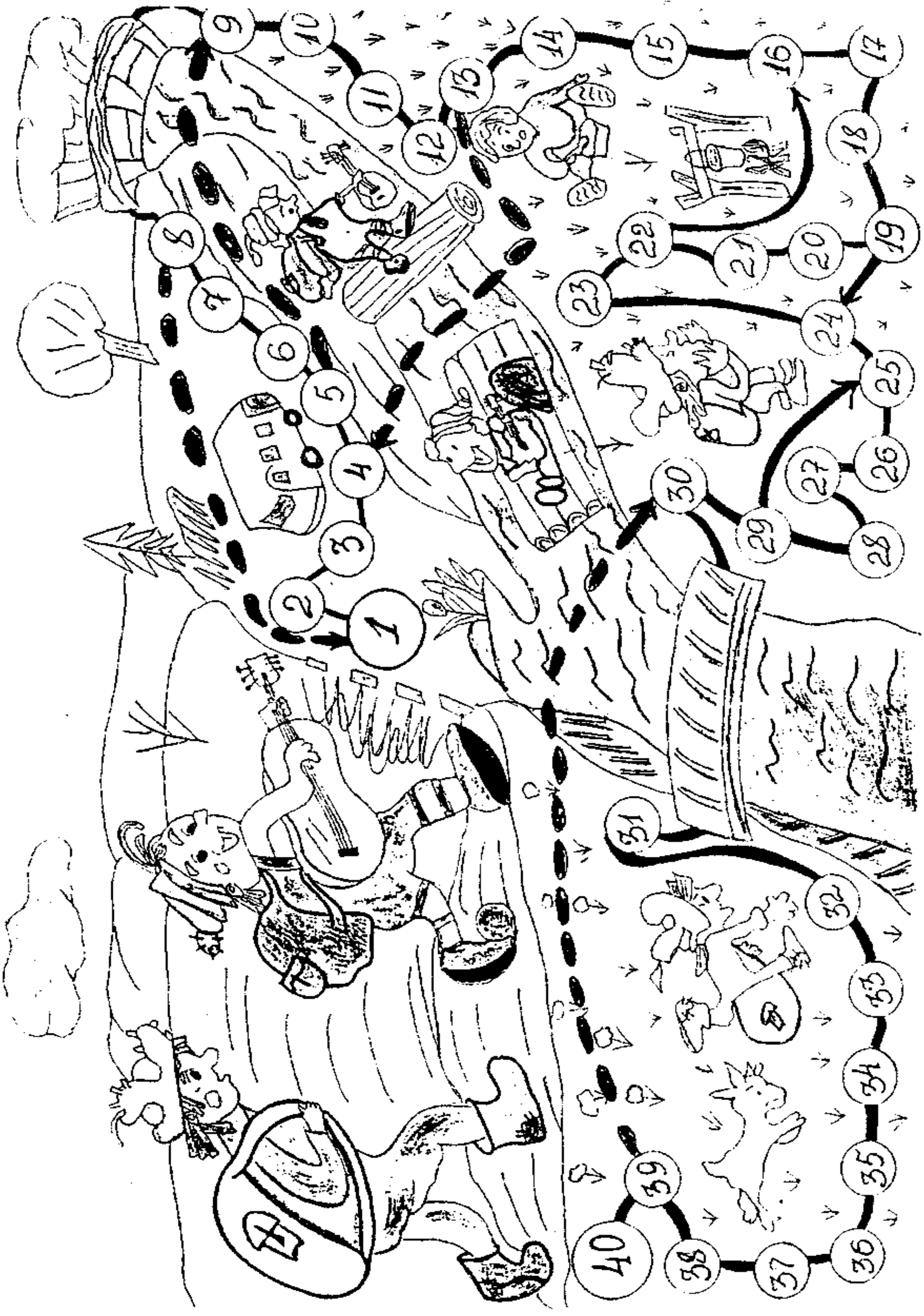


Рис. 8


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Додаток 3

Математична "Зоряна година"

...Наука лише тоді досягає досконалості, коли їй удається користуватись математикою.

Поль Лафарг

1.Вступне слово вчителя.

Правила гри схожі на правила телевізійної гри "Зоряна година". Кількість учасників 6 учнів, з них до фіналу повинні вийти тільки два – ті, хто найбільше набере зірок за правильні відповіді.

2.Початок гри.

I тур

На дошці виставляють портрети вчених:

1	2	3	4
Піфагор	Вієт	Галілей	Ератосфен

Запитання учасникам:

1. Хто довів твердження, яке встановлює зв'язок між коренями рівняння і його коефіцієнтами? (**2** Франсуа Вієт).
2. Чиїм іменем названа теорема, яка встановлює зв'язок між сторонами прямокутного трикутника? (**1** Піфагор).
3. Хто вперше наближено обчислив діаметр Землі? (**4** Ератосфен).
4. Кому належить вислів: "Всесвіт – це книга, яку написано мовою математики." (**3** Галілео Галілей).

II тур

На дошці виставляють портрети вчених:

1	2	3	4
Вейєрштрасс	Лейбніц	Магніцький	Ломоносов

Запитання до гравців:

1. Хто написав перший російський підручник з математики, який називався "Арифметика"? (**3** Л.П.Магніцький, у 1703 році).
2. Хто ввів знак абсолютної величини? (**1** Вейєрштрасс, німецький учений, у середині XIX ст).
3. Хто запропонував крапку. як знак множення? (**2** Г.В.Лейбніц, німецький учений, у XVII ст).
4. Хто назвав "Арифметику" Л.П.Магніцького "вратами учёности" і майже всю знав її напам'ять? (**4** М.В.Ломоносов).

III тур

На дошці записані числа:

1	2	3	4
0	**1**	**12**	**13**

Запитання учасникам:

1. Яке число в Стародавньому Вавилоні вважалось священним? (**3** 12 має багато дільників, ним зручно користуватися при вимірюванні. Звідси й поділ року на 12 місяців та доби на 24 години).
2. Яке число називають "чортовою дюжиною"? (**4** 13).
3. Яке число в "Арифметиці" Л.П.Магніцького називалося цифрою? (**1** 0).
4. Яке з чисел є найменшим натуральним? (**2** 1).

IV тур

1	2	3	4
Стародавня Русь	Стародавня Греція	Стародавній Рим	Вавилон

Запитання до гравців:

1. У якій країні дроби називалися "ламаними числами"? (**1** Стародавня Русь).
2. Мешканці якої стародавньої держави писали паличками на плитках сирої глини, які потім випалювали? Одиницю вони зображали загостреним донизу клином, звідки й пішла назва такого письма – клинопис (**4** Вавилон).
3. Де застосовувалася так звана "алфавітна нумерація", в якій цифри позначалися буквами? (**1** Стародавня Русь).
4. Мешканці якої стародавньої держави зображали одиницю вертикальною рискою, п'ять – рукою з відігнутим великим пальцем, десять – двома руками? (**3** Стародавній Рим).

Смішинки для болільників:

1. Що таке пряма? – Точка, що втекла.
2. Що таке круг? – Точка, що роздулася.
3. Що таке крива? – Криву ми маємо тоді, коли з останнього вагона поїзда бачимо весь поїзд.

V тур

На дошці виставляють портрети вчених:

1	2	3	4
Евклід	Лобачевський	Фалес	Архімед

Запитання до учасників:

1. Хто написав "Начала", які складаються із 13 книг? У цій праці він підбив підсумки попереднього стану грецької математики, створив фундамент для її подальшого розвитку, внаслідок чого його ім’ям називається геометрія, яка вивчається в школі. (**1** Евклід).
2. Він відкрив основний закон гідростатики, але головним в його науковій творчості була математика, а саме – обчислення довжин кривих, площ, об’ємів і центрів ваги різних геометричних фігур. Ідеї, якими він при цьому користувався, лягли в основу інтегрального числення. Його вбили під час розв’язування задачі. Про кого йде мова? (**4** Архімед).
3. Хто першим встановив істини: "Ділиться діаметром коло навпіл", "Рівні кути при основі рівнобічного трикутника", "Рівні трикутники обидва, що мають відповідні рівні сторони"? (**3** Фалес).
4. Якого великого математика англійський учений у свій час назвав Коперником геометрії? (**2** М.І.Лобачевський).

VI тур

На дошці виставляють портрети великих російських поетів та письменників:

1 Пушкін	2 Бенедиктов	3 Грибоєдов	4 Толстой

Запитання до учасників:

1. Хто з них закінчив фізико-математичний факультет університету? (**3** О.С.Грибоєдов).
2. Хто сказав:"Натхнення потрібне в поезії, як у геометрії"? (**1** О.С.Пушкін).
3. Хто був автором першого збірника математичних головоломок, написаного російською мовою? (**2** В.Г.Бенедиктов).
4. Він сам викладав математику в створеній ним школі й склав підручник з арифметики. Він сказав, що людину можна оцінювати дробом, знаменник якого становить те хороше, що вона думає про себе сама, а чисельник – те хороше, що думають про цю людину інші. Про кого йде мова? (**4** Л.М.Толстой).

ФІНАЛ

У фінал виходять два учасники, які отримують таке завдання: "Придумайте найбільше слів із слова **БІСЕКТРИСА**".

3.Слово надається переможцеві…

4.Підсумкове слово вчителя.

Додаток 4

Інформатико-математичний КВК

План

1. Слово ведучих.
2. Вітання команд, конкурс газет.
3. Конкурс «Словник програміста».
4. Слово журі.
5. Конкурс «Помилки веселого програміста».
6. Вікторина (конкурс болільників).
7. «Альбом програміста».
8. Слово журі.
9. Математичний калейдоскоп.
10. Конкурс капітанів команд.
11. Математична пантоміма.
12. Слово журі.
13. Конкурс «Щоб це означало?»
14. Домашнє завдання «Казка».
15. Слово журі.

(Звучить пісня «Ми починаємо КВК…»... На сцену виходять **двоє ведучих**.)

1.Добрий день, дорогі друзі!

2.Ми раді вітати вас на нашому чарівному засіданні Клубу веселих та кмітливих (КВКа)! Чому чарівному? Це дуже просто. Ще в стародавності числам приписували магічні властивості, а математиків вважали ледве не чарівниками.

1.У наш час чарівниками стали не тільки люди, але й машини. Про ці всемогутні (тобто, які все можуть, адже з цим і пов'язується поняття чарівництва) машини і про заклинання, тобто про команди, якими вони керуються, складена наука – інформатика.

2.Інформатика – не дуже давно ввійшло це слово в наш лексикон, але вже зайняло міцні позиції в ужитку.

1.Деяким учням слово «Інформатика» вселяє жахливі переживання, кошмарно неприємні відчуття з приводу майбутньої контрольної. Інші ж вільно орієнтуються в таких хитромудрих, і не звичних для слуху термінах, як біти, байти, регістри, операнди.

2.Сидячи перед екраном комп'ютера, вони почувають себе впевнено, як досвідчені капітани, справжні морські вовки за штурвалами своїх кораблів.

1.Сьогодні ми побачимо, як покажуть себе учасники наших команд...

2.Для проведення КВКа нам необхідно скласти його алгоритм.

1.А що таке алгоритм?

2.Алгоритм – це одне з основних математичних понять. Слово «алгоритм» походить від імені узбецького математика IX ст. ал-Хорезмі. У 828 році він написав арифметичний трактат «Книга про індійський рахунок». У перекладі на англійську мову трактат починається словами «Диксит ал-горизмі» – сказав ал-Хорезмі. Звідси й виникло слово алгоритм, яке зараз означає порядок дій.

1.Отже, (показує плакат) наш алгоритм називається Інформатико-математичний КВК. Аргументом у нас виступають команди-учасниці. Результатом повинен бути гарний настрій і, звичайно ж, команда-переможниця.

2.Спочатку нам необхідно вибрати проміжну, але дуже важливу величину – ЖУРІ. Воно у нас компетентне.

1.У нас у ЖУРІ:...

2.Поки не закінчиться КВК, команди беруть участь у конкурсах. І завжди, якщо команда підготувалася добре, то вона виграє конкурс, інакше їй доведеться зібрати усі свої сили, призвати на допомогу дотепність, кмітливість, гумор і виграти в КВКа.

```
алг Інформатико-математичний КВК
    арг команди-учасниці
    рез гарний настрій + команда-переможниця
поч ком ЖУРІ
     поки не закінчиться КВК
     пц
          команди беруть участь у конкурсах
          якщо команда підготувалася добре
                то вона виграє конкурс
                інакше необхідно зібрати усі свої сили,
                       призвати дотепність, кмітливість, гумор
                       і виграти в КВКа
          все повинно закінчитися добре
     кц
кін буде обов'язково щасливим!
```

1.Все повинно закінчитися добре і кінець буде обов'язково щасливим.

2.А зараз перший конкурс. Кожна команда повинна **представити себе, пояснити свою назву** та **показати гостям і журі газету**.

1.Першою вас вітає команда… Зустрічайте!

2.А тепер вас вітає команда… Зустрічайте!

1.Другий конкурс називається **«Словник програміста»**. Для його проведення нам необхідно викликати на сцену по одному учаснику з команд.

2.Ваше завдання: вам потрібно зараз, по моїй команді, за одну хвилину написати на аркуші паперу якнайбільше слів, пов'язаних з інформатикою.

1.Наприклад, алгоритм, байт і т.ін.

2.Готові? Почали! (На 1 хвилину включається музика, потім аркуші з виконаним завданням здаються журі для перевірки та нарахування балів).

1.Для оголошення результату першого конкурсу **слово** надається **журі**.

2.Розпочинаємо наступний конкурс **«Помилки веселого програміста»**.

1.Увага! Відомий юний програміст Андрюша Поспішайко вирішив піти в кіно і, як звичайно, склав програму своїх дій.

2.Основна програма.

```
поч Піти в шкільний буфет
      якщо є тістечко
              то перехід на «кінець 1»
                  стати в чергу
      якщо дістанеться з'їсти
              інакше якщо почастують – з'їсти
                              інакше йти в кіно на зекономлені гроші
Присвоєння: кінотеатр (0) «Зоряний»
                  кінотеатр (1) «Мир»
                  кінотеатр (2) «Ятрань»
                  кінотеатр (3) «Інгул»
Вибір від К = 1 до 4
пц
     якщо кіно (кінотеатр (К)) = Во!
            то йти в кінотеатр (К)
            інакше перехід на кінець 1
кц
     йти додому; вчити уроки
     Кінець 1: кіно не буде!
кінець
```

2. Підпрограма кіно.

```
поч: якщо в «кінотеатрі» – детектив,
             то кіно – Во!
       якщо в кінотеатрі – фантастика,
             то кіно – Во!
       якщо в кінотеатрі – бойовик,
             то кіно – Во!
       інакше
кінець
```

1.Як бачите Андрійко дуже квапився, тому зробив масу помилок у програмних алгоритмах. Зараз командам пропонується на чистому аркуші паперу написати алгоритм без помилок і показати його журі.

2.А ми тим часом проведемо жартівливу **вікторину з болільниками**. Хто правильно відповість на запитання, той принесе своїй команді додаткову кількість балів. Отже:

1.У яких галузях народного господарства застосовуються ЕОМ? (За кожну названу галузь 0,5 бала.)

2.Чим відрізняється ЕОМ від людини? (У людини є емоції, почуття. 2 бали.)

1.У яких сферах життя ЕОМ не може замінити людини цілком? (Машина не замінить вихователя, учителя. 2 бали.)

2.Як трьома запитаннями відрізнити людину від ЕОМ? (Ви можете не спати 10 діб підряд? Ви зможете прожити 15 діб без їжі й при цьому розмірковувати? Ви кохаєте кого-небудь?)

(Відповіді можуть бути іншими, їх логічність, дотепність і оригінальність визначає журі.)

1.Який кут опише хвилинна стрілка за 2 години? (720°. 2 бали.)

2.Як за допомогою трьох прямих одержати 24 прямі кути? (У просторі три перпендикулярні прямі, що перетинаються в одній точці, утворять 24 прямі кути. 2 бали.)

1.Команди віддають журі складений алгоритм. Поки журі підраховує кількість балів за останні три конкурси, ми прочитаємо вам цитати з **«Альбому програміста»**.

2.Перш, ніж написати програму – переконайся, що існує ЕОМ, здатна її переварити.

1.Щоб опанувати мистецтвом програмування, потрібно в першу чергу навчитися володіти собою.

2.Якщо по-твоєму програма складена правильно, це ще не означає, що з цим погодиться машина.

1.Немає нічого більш цікавого й загадкового, чим з помилками складена, але безпомилково працююча програма.

2.Не розмовляй із друзями й близькими алгоритмічною мовою – тебе можуть неправильно зрозуміти.

1.З усіх команд він віддавав перевагу оператору присвоєння. Після оператора PRINT (принт – друкувати) йому завжди хотілося дописати слово «гроші».

2.А зараз **слово** надається **журі**. (Журі називає кількість балів, набраних командами за кожен конкурс окремо, й підсумкову кількість балів кожної команди за всі чотири конкурси.)

1.**Математичний калейдоскоп** містить у собі три конкурси: поетів, солістів і логіків. Я прошу капітанів викликати на сцену по одному учаснику для кожного конкурсу. (Роздаються завдання конкурсів.

- Для поетів – скласти вірш на риму невдача-задача, у якому буде якнайбільше математичних термінів.

- Для солістів – проспівати теорему чи означення математичного поняття на мелодію популярної пісні.
- Для логіків – сформулювати твердження, обернене до даного: «Немає нічого краще поганої погоди».)

2.Поки учасники команд готуються до математичного калейдоскопу, ми проведемо **конкурс капітанів команд**. Прошу капітанів вийти на сцену.

1.Уявіть собі таку ситуацію. Ви – капітан міжгалактичного корабля і ваш корабель от уже кілька років летить до нової незвіданої галактики. На допомогу екіпажу корабля з Землі була дана електронна машина, що може сконструювати <u>абсолютно все</u>, що забажаєте, але тільки в <u>єдиному</u> екземплярі. Вичерпуються ресурси. І раптом...

2.Увага! Корабель ввійшов у пояс астероїдів. Один астероїд з великою швидкістю наближається до корабля.

1.Удар!!! Вийшла з ладу одна система. Необхідно терміново виготовити 12 однакових деталей, щоб її полагодити, інакше корабель загине. А ЕОМ може зробити тільки одну таку деталь. Перепрограмувати її неможливо.

2.Ваші дії. Тільки відповідайте швидко. Час не чекає!

(Відповіді можуть бути різними. Наприклад, якщо ЕОМ може робити абсолютно все, то потрібно їй замовити таку ж ЕОМ, а «новоспеченій» ЕОМ – точно таку ж і т.д., поки їх не стане 12. Потім кожній з них замовити всього одну деталь. Можна взагалі замовити один-єдиний новий міжгалактичний корабель, можливо він буде якоїсь іншої моделі, конструкції. Перейти усім у новий корабель і продовжувати політ. Відповіді оцінює журі.)

1.А зараз слово надається нашим поетам, що повинні були скласти вірш на риму невдача-задача, де буде якнайбільше математичних термінів. (Поети зачитують свої мистецькі твори.)

2.Тепер солісти проспівають нам теорему чи означення математичного поняття на мелодію популярної пісні. (Солісти співають.)

1.Логіки повинні були сформулювати твердження, яке обернене до даного: «Немає нічого краще поганої погоди». Послухаємо, що в них вийшло. (Логіки зачитують свої фрази.)

2.Наступний конкурс називається **«Математична пантоміма»**. Команди повинні зібрати всю свою фантазію й придумати як без слів, одними тільки жестами й мімікою продемонструвати один одному який-небудь математичний знак, символ.

1.Наприклад, рівнобіжні прямі можна закодувати так: ведучі стають рівно й опускають руки «по швах». Дві хвилини командам на розмірковування. (Грає музика.)

2.Першою демонструє свою пантоміму команда… Команді-суперниці дається одна хвилина, щоб угадати, що ж це? (Потім команди міняються ролями: перша – вгадує, а друга – демонструє. Команди показують 2-3 пантоміми, журі оцінює як саму пантоміму, так і правильність відповіді на неї. Під час пауз грає музика.)

1.Надаємо **слово журі** для оголошення підсумків минулих конкурсів.

2.(На сцену вивішується плакат **«Щоб це означало?»**.) Подивіться уважно на плакат. За дві хвилини ви повинні придумати оригінальний підпис для цього малюнка. (Грає музика.)

1.Отже, щоб це означало? (Без ЕОМ і води не нап'єшся! Без праці не витягнеш і цебра!)

2.І, нарешті, останній конкурс – **домашнє завдання**. Називається він **«Казка»**. Команди повинні були перекласти казку, яка їм сподобалася, на «мову інформатики» та інсценувати її. Першою нам покаже свою казку команда…

1.Тепер свою казку демонструє команда…

2.**Слово журі!** (Журі підраховує всі бали, визначає переможців і повідомляє результат КВКа.)

1.Ну, що ж, все закінчилося добре. Дякуємо журі, дякуємо учасникам команд.

2.Дякуємо болільникам, дякуємо всім, хто був присутній на засіданні нашого Клубу Веселих і Кмітливих.

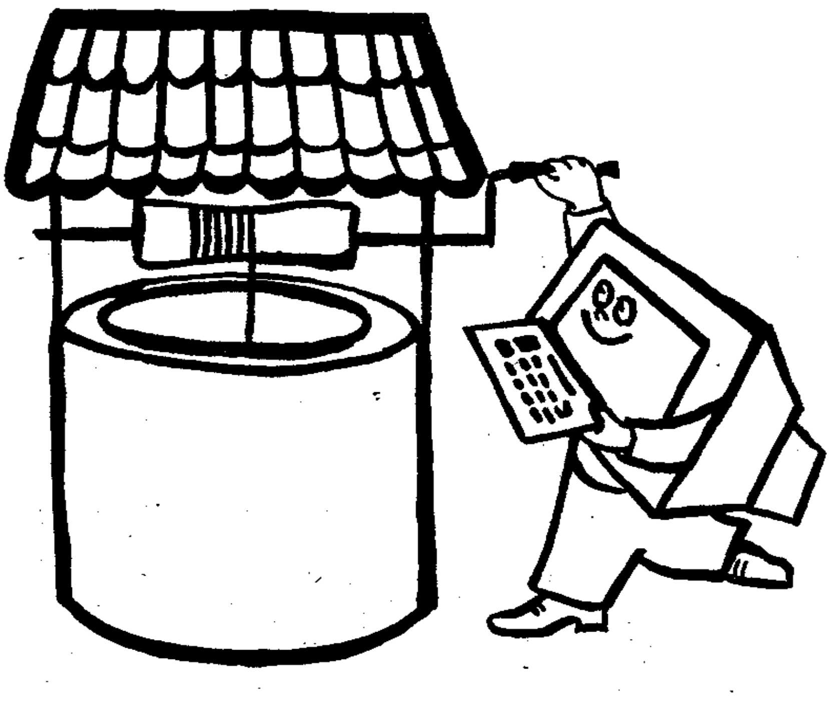
1.До побачення.

2.До нових зустрічей!

1.Усього вам найкращого!

2.На все добре!

Щоб це означало?



Додаток 5

Поурочний план теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики» (30 год.)

№ уроку	Тема уроку	К-сть год.
1	Основні поняття теорії ймовірностей. Випадковий дослід і випадкова подія. Відносна частота подій. Ймовірність події.	1
2	Простір елементарних подій. Дії над подіями.	1
3	Класичне означення імовірності. Обчислення імовірностей подій.	1
4-5	Обчислення ймовірностей подій за допомогою формул та правил комбінаторики	2
6	Геометричні ймовірності	1
7	Розв’язування вправ.	1
8	Самостійна робота.	1
9-10	Ймовірності суми та добутку подій. Умовні ймовірності.	2
11-12	Незалежні події. Теореми додавання та множення подій.	2
13	Наслідки теорем додавання та множення подій.	1
14	Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі.	1
15	Розв’язування вправ.	1
16	Контрольна робота (тести).	1
17	Дискретна випадкова величина, закон її розподілу.	1
18	Математичне сподівання випадкової величини.	1
19	Властивості математичного сподівання.	1
20	Дисперсія випадкової величини.	1
21	Незалежні випадкові величини.	1
22	Уявлення про закон великих чисел.	1
23	Розв’язування вправ.	1
24	Самостійна робота (тести).	1
25-26	Основні поняття математичної статистики. Вибірка та її основні характеристики. Вибірковий метод у статистиці.	2
27	Розв’язування вправ.	1
28	Контрольна робота.	1
29-30	Аналіз контрольної роботи. Підсумкове заняття.	2

Додаток 6

Зразки тестових завдань

(тестування проводиться на початку уроку №5, тема уроку «Обчислення ймовірностей подій за допомогою формул та правил комбінаторики» (див. додаток 5))

Варіант №1

1. Наслідок випробування, який може відбутися або не відбутися у результаті реалізації певного комплексу умов називають

а) випадковою величиною; б) подією;

*в) випадковою подією; г) іншим чином, як?

2. Якщо деякий об'єкт А можна обрати *m* способами, і після кожного такого вибору інший об'єкт В можна вибрати (незалежно від вибору об'єкта А) *n* способами, то вибір пари (А;В) у вказаному порядку можна виконати … способами.

($m \cdot n$)

3. Обчисліть C_{44}^{42}

($C_{44}^{42} = C_{44}^{44-42} = C_{44}^{2} = \dfrac{44 \cdot 43}{1 \cdot 2} = 22 \cdot 43 = 946$)

4. Сполуки з *n* елементів по *к*, які відрізняються хоча б одним елементом називають

а) перестановками; б) розміщеннями;

*в) комбінаціями; г) іншим чином.

5. Обчисліть P_8

($P_8=8!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8=720\cdot56=40320$)

6. Сполуки з *n* елементів по *к* , які відрізняються хоча б одним елементом або порядком розміщення елементів називають

а) перестановками; *б) розміщеннями;

в) комбінаціями; г) іншим чином.

7. Обчисліть A_{14}^{3}

($A_{14}^{3} = 14 \cdot 13 \cdot 12 = 2184$)

8. Вінні-Пух, П'ятачок і Сова збиралися на день народження до Віслючка Іа і почали вирішувати, в якому порядку вони будуть вручати подарунки. Скільки можливих варіантів у них є?

($P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$)

Варіант №2

1. Однорідні події, що спостерігаються за певних умов, які можуть бути відтворені необмежену кількість разів називають:

а) неоднорідними; б) рівноможливими;

*в) масовими; г) сумісними.

2. Якими поняттями оперує комбінаторика?

а) подіями; б) ймовірністю подій;

*в) сполуками; г) тестами.

3. Обчисліть C_{34}^{30}

($C_{34}^{30} = C_{34}^{34-30} = C_{34}^{4} = \dfrac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 34 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 31 = 374 \cdot 124 = 46376$)

4. Сполуки з n елементів, які відрізняються тільки порядком елементів називають

*****а) перестановками; б) розміщеннями;

в) комбінаціями; г) іншим чином.

5. Якщо деякий об’єкт А можна обрати m способами, а інший об’єкт В можна вибрати n способами, то вибір або А; або В можна виконати … способами.

(m+n)

6. Обчисліть P_6

(P_6=6!=1·2·3·4·5·6=720)

7. Обчисліть A_{12}^{3}

($A_{12}^{3} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$)

8. Тітонька Поллі наказала Тому Соєру пофарбувати паркан біля будинку, який складається з трьох секцій. Він вирішив пофарбувати кожну секцію у свій колір і замислився, в які кольори і в якому порядку це зробити. Скільки варіантів фарбування є, якщо у Тома 5 фарб різних кольорів?

($A_{5}^{3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$)

Після тестування учні за партою оцінюють роботу один одного, вчитель читає й аналізує кожне завдання, розв’язання, відповіді. Учні знаходять і виправляють помилки, корегують свої знання, необхідні для обчислення ймовірностей подій.

ЗМІСТ

ВСТУП 3

Розділ І. Шляхи організації групової навчальної діяльності молодших підлітків з метою розвитку їх пізнавальної активності 8

§1. Пізнавальна активність як педагогічне утворення 9

§2. Стимулювання навчальних інтересів у процесі групової навчальної діяльності учнів 17

§3. Педагогічні можливості розвитку пізнавальної активності молодших підлітків в процесі групової позаурочної діяльності 20

§4. Комплектування груп на основі конструювання простору міжособистісних координацій при груповій організації навчальної діяльності 26

§5. Моделювання "інформаційного поля" уроку при груповій організації навчання 34

§6. Розвиток комунікативного аспекту творчості при груповій навчальній діяльності молодших підлітків як одна з умов підвищення їх пізнавальної активності 43

Урок-гра: "Робота НДЦ шкільних проблем математики" 50

Література до розділу 54

Розділ ІІ. Організація самостійної роботи учнів 7-9 класів у процесі навчання математики 56

§1.Самостійна робота учнів і її роль у залученні школярів до активної навчально–пізнавальної діяльності 56

§2.Класифікація видів самостійних робіт у контексті дидактичних досліджень 62

§3.Форми організації навчально–пізнавальної діяльності при виконанні учнями самостійних робіт 70

§4.Міра допомоги вчителя при організації і проведенні самостійної роботи 75

§5.Застосування сучасних засобів навчання для удосконалення організації самостійної роботи учнів 79

Література до розділу 89

Розділ III. Методичні особливості навчання теорії ймовірностей у профільних класах 92
§1.Методичні прийоми навчання обчислення ймовірностей подій за допомогою формул та правил комбінаторики 93
§2.Використання наочних схем під час вивчення теорем додавання і множення ймовірностей та їх наслідків 101
§3.Прикладна спрямованість навчання теорії ймовірностей в старшій школі 109
§4.Тестовий контроль під час навчання теорії ймовірностей 119
Література до розділу 122
Розділ IV. Засоби універсальної математичної системи Maple у математиці 124
§1.Векторна алгебра 130
§2.Матриці та визначники 133
§3.Розв’язування систем алгебраїчних рівнянь 142
§4.Поняття границі. Похідна і диференціал 147
§5.Обчислення інтегралів та метод заміни змінної 150
§6.Інтегрування частинами 156
§7.Перетворення графіків функцій 159
Література до розділу 163
ДОДАТКИ 164
Додаток 1. Урок з математики (6 клас) 164
Додаток 2. Урок з математики (9 клас) 172
Додаток 3. Математична "Зоряна година" 185
Додаток 4. Інформатико-математичний КВК 188
Додаток 5. Поурочний план теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики» (30 год.) 194
Додаток 6. Зразки тестових завдань 195

Інші наукові й методичні здобутки творчої групи викладачів КДПУ імені В.Винниченка (професорів Авраменко О.В., Кушніра В.А., Філера З.Ю., заслуженого працівника освіти Вороного О.М., доцентів Вдовенко В.В., Ізюмченко Л.В., Лутченко Л.І., Яременко Ю.В.) читайте на сайтах www.kspu.kr.ua/zfms та www.kspu.kr.ua/intelect.

ПОСІБНИК ДЛЯ СПЕЦКУРСУ

Авраменко О.В., Лутченко Л.І., Ретунська В.В., Ріжняк Р.Я., Шлянчак С.О.

Інноваційні та сучасні педагогічні технології навчання математики

Підписано до друку 02.12.2009. Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Папір офсет.
Друк офсет. Ум.др.арк. 8,33. Тираж 500.

Кіровоградський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка
25006, Кіровоград, вул.Шевченка, 1.
Тел.: (0522) 28 59 84.
Fax.: (0522) 24 85 44
E−Mail.: mails@kspu.kr.ua